绝密 ★ 考试结束前

浙江省2013年1月高等教育自学考试

实变函数与泛函分析初步试题

课程代码：10023

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题(本大题共5小题，每小题4分，共20分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将"答题纸"的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1．设M表示代数数的全体，R是实数集，则它们的基数之间的关系是

A. $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{R}}$　　B. $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{R}}$

C. $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{R}}$　　D.不能判定

2．设Q是R中有理数的全体，$Q^2=\{(r_1, r_2)|r_1\in Q, r_2\in Q\}$，则在$R^2$中$Q^2$的导集$(Q^2)'$是

A.Q^2　　B.Ø

C.R^2　　D.$R^2 \setminus Q^2$

3．设P是Cantor三分集，$f(x)=\begin{cases}0, & x\in P\\ 1, & x\notin P\end{cases}$，则$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=$

A.0　　B.1

C.－1　　D.2

4．设 $f(x)$在 $E\subset R^n$ 有定义，则 $f(x)$在 E 中不连续点构成一个

A.开集　　B.闭集

C.F_σ 型集　　D.G_δ 型集

5．设 $f(x)$在［a,b］上单调，$G=\{x\in［a,b］|f'(x)=+\infty\}$，则有

A.$mG>0$　　B.$mG=0$

C.$mG<0$　　D.不能判定

二、判断题（本大题共 7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

判断下列各题，在答题纸相应位置正确的涂“A”，错误的涂“B”。

6.设 M 是可数集 Q 的所有子集构成的集合，则 M 是可数集.

7.一列闭集的并集是闭集.

8.R 中闭集或者是全直线，或者是从直线挖去有限个或者可数个互不相交的开区间.

9.Lebesgue 可测集一定能够表示为一个 F_σ 型集与零测度集的并集.

10．设 $f(x)$在 $E\subset R^n$ 上连续，则 $f(x)$在 $E\subset R^n$ 上可测.

11．设 $f(x)$在 $E\subset R^n$ 上 Riemann 可积，则 $f(x)$在 $E\subset R^n$ 上 Lebesgue 可积.

12．［a,b］上单调函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$在［a,b］上可积.

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

三、填空题(本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

13．设集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $A_n\supset A_{n+1}(n=1,2,\ldots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=$_________.

14．设 E 是[0,1]中的全部有理点, 则 E 在 R^2 的边界 $\partial E=$_________.

15．设 $E\subset R^n$ 是 Lebesgue 可测集，则对任意的集合 T，$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)=$_________.

16．设 $f(x)$在 E 上可测,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E[f<-n]=$_________.

17．设 $f(x)$ 在 $E\subset R^n$ 上 Lebesgue 可积，$f^+(x), f^-(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的正部与负部，且 $I_1=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$，$I_2=\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x=$________.

18．设 $f_n(x)(n=1,2,\ldots)$ 是可测集 E 上一列非负可测函数，记 $I_1=\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$，

$I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$，则它们的大小关系是________.

19．$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$ ________.

20．设 $f(x)=kx+b$，$k>0$, $0\leqslant x\leqslant 1$，则 $f(x)$的全变差 $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=$________.

四、完成下列各题（本大题共 3 小题，每小题 9 分，共 27 分）

21.设 $E\subset R^p$ 是 Lebesgue 可测集，证明对任意 $\varepsilon>0$,存在开集 $G\supset E$，使得 $m(G-E)<\varepsilon$.

22.设 $E\subset R$, $f(x)$是 E 上 a.e 有限的可测函数，证明存在 R 上一列连续函数$\{g_n(x)\}$s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$ a.e 于 E.

23.设 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1\}$,在 D 定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

证明 $f(x,y)$在 D 上不可积.