

二、判断题(本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分)判断下列各题, 正确的在题后括号内打“√□”, 错的打“□×”。

4. 集列的上限集与下限集一定不相等.()
5. 开集一定是博雷尔 (Borel) 集.()
6. 设 $E \subset \mathbf{R}^1$, \bar{E} 是 E 的闭包, $mE=0$, 则 $m(\bar{E})=0$.()
7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的一个稠密集上处处不连续, 则 $f(x)$ 一定不是 Riemann 可积函数.()
8. 定义在零测集上的函数一定是可测函数.()
9. 定义在区间上的单调函数的导数几乎处处存在.()

三、填空题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

10. 设 $A_{2n-1}=(0, \sin \frac{1}{n})$, $A_{2n}=(\frac{1}{n}, n)$, 则集列 $\{A_n\}$ 的上限集为_____.
11. 球面 $S^2=\{(x, y, z) | x^2+y^2+z^2=1\}$ 的基数为_____.
12. 设 $F=\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$, $E=F \cup \{(x, y) | y = \sin \frac{1}{x}, x \in (0, 1)\}$, 则 E 的开核 $\dot{E} =$ _____.
13. 记 E 为康托集和有理数集的并集, 则 $mE=$ _____.
14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调, E 是 $f(x)$ 的连续点全体, 则 $mE=$ _____.
15. $f(x)$ 是可测集 E 上的简单函数是指_____.
16. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的黎曼可积的充要条件是_____.
17. $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上几乎处处相等是指_____.
18. 举一个函数列 $\{f_n(x)\}$ 的例子, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, \infty)$ 上处处收敛于 0, 但 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, \infty)$ 上不依测度收敛于 0, 例如 $f_n(x)=$ _____.
19. 区间 $[a, b]$ 上的函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个不定积分是指_____.

四、完成下列各题(本大题共 4 小题, 每小题 9 分, 共 36 分)

20. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的实值连续函数, 证明对于任意常数 a , $E=\{x | f(x) > a\}$ 是开集, 而 $F=\{x | f(x) \geq a\}$ 总是闭集.
21. 设 E 是 $[0, 1]$ 中的不可测集, 令 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in E \\ -x, & x \notin E \end{cases}$, 问 $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上是否可测? 为什么?
22. 设 $f(x)$ 在 E 上可积分, 记 $e_n = E \{ |f| \geq n \}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot m e_n = 0$.
23. 问函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0, 1]$ 上是不是有界变差函数? 为什么?