

12. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AP^T =$ _____.

13. 设 A 是 4×3 矩阵, 秩 $(A) = 2$, 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则秩 $(AB) =$ _____.

14. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则数 $t =$ _____.

15. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & t & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 则数 $t =$ _____.

16. 已知 $\lambda = 0$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的 2 重特征值, 则 A 的另一特征值为 _____.

17. 已知向量 $\alpha = (2, 1, 0, 3)^T$, $\beta = (1, -2, 1, k)^T$, α 与 β 的内积为 2, 则数 $k =$ _____.

18. 设向量 $\alpha = (b, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 为单位向量, 则数 $b =$ _____.

19. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的矩阵为 _____.

20. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (k+1)x_1^2 + (k-1)x_2^2 + (k-2)x_3^2$ 正定, 则数 k 的取值范围为 _____.

三、计算题 (本大题共 6 小题, 每小题 9 分, 共 54 分)

21. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

22. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A 的逆矩阵 A^{-1} ;

(2) 解矩阵方程 $AX = B$.

23. 设向量 $\alpha = (1, -1, -1, 1)$, $\beta = (-1, 1, -1)$, 求 (1) 矩阵 $A = \alpha^T \beta$; (2) A^2 .

24. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$,

$\alpha_4 = (1, -1, 2, 0)^T$, 求向量组的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

25. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$
 的通解 (要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

26. 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_3 + 4x_3^2$ 为标准形, 并写出所用的正交变换.

四、证明题 (本大题 6 分)

27. 设 a, b, c 为任意实数, 证明向量组 $\alpha_1 = (1, a, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, b, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, c, 0, 0)^T$ 线性无关.

自考365
www.zikao365.com

