浙江省2008年7月高等教育自学考试
常微分方程试题
课程代码：10002

一、填空题(本大题共12小题，每小题3分，共36分)

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

1.若微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)(\frac{dy}{dx})^2+g(x)y=0$ 为线性微分方程，则 $f(x)=$________.

2.微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 有不平行于 x 轴的直线积分曲线，此直线积分曲线为

$y=$________.

3.一阶微分方程

$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$，

这里 $f(x),\varphi(y)$ 分别是 x,y 的连续函数，如果 $\varphi(y)\neq0$，则方程的通解为________.

4.如果 $f(x,y)$ 在 R:$|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$ 上连续，且关于 y 满足利普希茨条件.则方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 定义于 $|x-x_0|\leqslant h$ 上，满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的连续解存在且唯一，这里 $h=\min(a,\frac{b}{M}),M=$_________.

5.方程 $\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=0$ 中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数，又设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是方程 n 个不相等的特征根，

则方程的通解为________.

6.常系数线性方程 $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$ 的通解为________.

7.若二阶齐线性方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$ 中 $xP(x)$和 $x^2q(x)$均能展开成 x 的幂级数，且收敛区间为$|x|<R$，则方程

有形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}$ ________的特解，式中的 α 是一个待定的常数.

8.A 是 4 ×4 的常数矩阵，它的特征方程为$(\lambda+1)(\lambda+2)^3=0$，方程组 $x'=Ax$ 满足初始条件

$\varphi(0)=\eta$ 的解

$\varphi(t)=e^{-t}v_1+e^{-2t}$〔__________________〕$v_2$

其中 v_1 满足方程$(A+E)v_1=0$ v_2 满足方程$(A+2E)^3v_2=0$ 且 $v_1+v_2=\eta$.

9.设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$，则方程组 $x'=Ax$ 的基解矩阵 $\exp At$=______________.

10.对矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$已算得 λ=3 是 A 的二重特征值，则方程 $x'=Ax$

的基解矩阵 $\exp At$=____________________________.

11.方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases}$ 的奇点类型是________.

12.用李雅普诺夫函数 $V(x,y)=x^2+y^2$ 可确定方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + (x-y)(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + (x+y)(x^2+y^2) \end{cases}$$

的零解稳定性为________.

二、计算题(本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分)

1.解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

2.解方程

$$\frac{ds}{dt} = -(\cos t)s + \frac{1}{2}\sin 2t.$$

3.解方程

$(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$.

4.解方程

$y=y'^2e^{y'}$.

5.求方程

$\frac{dy}{dx}=x-y^2$通过点(0，0)的二次近似解.

6.求方程

$x''+x'-2x=8\sin 2t$

满足 $x(0)=0, x'(0)=0$ 的解.

7.求方程组

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -4x_1+4x_2+2x_3 \\ x_3' = 2x_1-x_2-x_3 \end{cases}$$ 的基解矩阵 $\Phi(t)$.

8.已知方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\mu x-y \\ \frac{dy}{dt}=\mu y-z \\ \frac{dz}{dt}=\mu z-x \end{cases}$$

的零解渐近稳定，求 μ 的取值范围.

三、证明题(本大题8分)

如果 $a_i(t)$ i=1,2,…，n 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，$x_1(t),x_2(t),\cdots$，$x_n(t)$是方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0$$

在区间〔a,b〕上线性无关的解.则其伏朗斯基行列式 $W(t)$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上都不等于零.