浙江省2008年10月高等教育自学考试
实变函数与泛函分析初步试题
课程代码：10023

一、单项选择题(本大题共3小题，每小题4分，共12分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1.可数个闭集的并集一定是（　　）

A.开集　　B.闭集

C.F_σ集　　D.G_δ集

2.若 $A=[0,1]-\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$, $B=[-1,3]\cap\mathbf{Q}$, $C=[5,6]-\mathbf{Q}$，则与（$A\cap B$）$\cup C$ 对等的集合是（　　）

A.（$A\cup C$）$\cap$（$B\cup C$）　　B.（$A\cap C$）$\cup B$

C.（$A\cup B$）$\cap C$　　D.（$A\cup C$）$\cap B$

3.若简单函数列$\{f_n(x)\}$满足$|f_n(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$一定是（　　）

A.简单函数　　B.可测函数

C.连续函数　　D.可积函数

二、判断题（本大题共6小题，每小题2分，共12分）

判断下列各题，正确的在题后括号内打“√”，错的打“×”。

4.对一切正整数 n，$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 一定对等.（　　　）

5.若用 A 表示平面上以有理点为中心、有理数为半径的所有圆，则 A 是可数集.（　　　）

6.$f(x)$为［a,b］上连续函数 $\Leftrightarrow \forall$ 实数 c，$E=\{x|f(x)\geqslant c\}$ 是闭集.（　　　）

7.若 A、$B\subset\mathbf{R}$，$A\cup B$ 可测，$m(A\cup B)<+\infty$,$m(A\cup B)=m^*A+m^*B$,则 A 与 B 都是可测集.（　　　）

8.两个不可测函数的乘积一定不是可测函数.（　　　）

9.设 $\{E_n\}$ 为两两不交的可测集列，$f(x)$在 E_n 上 Lebesgue 可积，则 $f(x)$在 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 上也 Lebesgue 可积.（　　　）

三、填空题(本大题共10小题，每空4分，共40分)

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

10.设 $A_{2n-1}=(-n,\frac{1}{n})$，$A_{2n}=(0,n)$,则集列 $\{A_n\}$ 的上限集为__________.

11.设 $A_n=(1-\frac{1}{2n},2+\frac{1}{n})$，则 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}A_n=$__________.

12.用 E 表示平面上无穷多个两两不相交的圆所成之集，则 E 的基数为__________.

13.设 $F=\left\{(x,y)\,|\,y=\sin\frac{1}{x},x\in(0,\infty)\right\}$，$E=\{(0,y)|y\in(1,2)\}\cup F$，则 E 的导集 E' =__________.

14.记 E 为 $\mathbf{R}^3$ 中边长为2的立方体，则 E 中的有理点集的外测度为__________.

15.设 E 是一个可数点集 A 和有理数集 $\mathbf{Q}$ 的并集，则 mE=__________.

16.函数 $f(x)$在区间［0,1］上几乎处处连续是指__________.

17.设非负函数 $f(x)$在 E 上可积，$\int_E f(x)dx=0$，则 $mE[f>0]$ =__________.

18.设在 *Cantor* 集 P_0 上定义函数 $f(x)=0$，而在 P_0 的余集中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间上定义为 $1(n=1,2,\cdots)$，则 $f(x)$在［0,1］上的 Lebesgue 积分值为__________.

19.设 $f(x)=\begin{cases}2x, x\in[0,1]-\mathbf{Q}\\ \sin x, x\in[1,3]\cap\mathbf{Q}\\ 1,\ \text{其他}\end{cases}$，则 $\int_{[0,8]}f(x)\mathrm{d}x$=__________.

四、完成下列各题(本大题共4小题，每小题9分，共36分)

20.如果 $m^*E=0$，证明 E 可测.

21.设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集，函数 $f(x)$定义在 E 上，若 $\forall\delta>0$，存在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集 E_δ，使 $E_\delta\subset E$，$m(E-E_\delta)<\delta$，且 $f(x)$

是 E_δ 上的连续函数，证明 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

22.利用 Lebesgue 控制收敛定理，说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n\cdot\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^2 nx\mathrm{d}x$ 存在，并求之.

23.计算函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,1]\\ x+4, x\in(1,2]\end{cases}$ 在［0,2］上的全变差。