

4. $\int_{-1}^1 \frac{x \cos x}{1 + \sin^6 x} dx = (\quad)$

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. 1

D. 0

5. 设生产 x 个单位的总成本函数为 $C(x) = \frac{x^2}{12} + 20x + 7$, 则生产 6 个单位产品时的边际成本是 ()

A. 6

B. 20

C. 21

D. 22

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

6. 函数 $y = \frac{1}{|x| - x}$ 的定义域是 _____.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^n =$ _____.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos x =$ _____.

9. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} =$ _____.

10. 设函数 $f(x) = e^{kx}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔定理的条件, 则 $k =$ _____.

11. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的水平渐近线是 _____.

12. 曲线 $y = \cos^4 x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程是 _____.

13. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx =$ _____.

14. 微分方程 $y' - 2xy = 0$ 的通解是 _____.

15. 设 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $dz|_{(1,2)} =$ _____.

三、计算题 (一) (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

17. 设 $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$, 求 y' .

18. 求不定积分 $\int \frac{xdx}{x^4 + 2x^2 + 2}$.

19. 设 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

20. 设隐函数 $z(x, y)$ 由方程 $x+2y+z=2\sqrt{xyz}$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

四、计算题(二)(本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

21. 设 $y = \ln \cos \frac{1}{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}$, 求 y' .

22. 计算定积分 $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

23. 计算二重积分 $I = \iint_D x(x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=0, y=0$ 及 $x+y=3$ 所围成的闭区域.

五、应用题(本大题共 9 分)

24. 设曲线 l 的方程为 $y = a \ln x$ ($a > 0$), 曲线 l 的一条切线 l_1 过原点, 求

(1) 由曲线 l , 切线 l_1 以及 x 轴所围成的平面图形的面积 S ;

(2) 求此平面图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积 V .

六、证明题(本大题共 5 分)

25. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的导数, $a < b$, 且 $f(a) = 0$,

证明: 当 $x \in [a, b]$ 时, 有 $|f(x)| \leq \int_a^b |f'(t)| dt$.