

16. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ 的秩 = _____.

17. 设 α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解, 则 $A(3\alpha_1 + 7\alpha_2) =$ _____.

18. 设方阵 A 有一个特征值为 0, 则 $\det(A^3) =$ _____.

19. 设 P 为正交矩阵, 若 $(Px, Py) = 8$, 则 $(x, y) =$ _____.

20. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型, 则 t 满足 _____.

三、计算题(本大题共 6 小题, 每小题 9 分, 共 54 分)

21. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

22. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

23. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2), \alpha_2 = (2, 5, -6, -5), \alpha_3 = (3, 1, 1, 1), \alpha_4 = (-1, 2, -7, -3)$ 的一个最大线性无关组, 并将其余向量通过该最大线性无关组表示出来.

24. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系及其结构解.

25. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

26. 写出下列二次型的矩阵, 并判断其是否是正定二次型.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

四、证明题(本大题共 1 小题, 6 分)

27. 设方阵 A 满足 $(A+E)^2 = E$, 且 B 与 A 相似, 证明: $B^2 + 2B = 0$.