

- A. 齐次微分方程
B. 可分离变量的微分方程
C. 一阶线性齐次微分方程
D. 一阶线性非齐次微分方程

5. 无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ 的前三项和 $S_3 = (\quad)$

- A. -2
B. $\frac{19}{4}$
C. $\frac{27}{8}$
D. $\frac{65}{8}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

6. 已知向量 $\mathbf{a} = \{2, 2, -1\}$ ，则与 \mathbf{a} 反方向的单位向量是_____。

7. 设函数 $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ ，则 $f(1-x, 1+x) =$ _____。

8. 设积分区域 $D: x^2 + y^2 \leq 2$ ，则二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 在极坐标中的二次积分为_____。

9. 微分方程 $y'' + y = 2e^x$ 的一个特解是 $y^* =$ _____。

10. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数， $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0) \\ e^x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，

则 $S(0) =$ _____。

三、计算题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

11. 求过点 $P(-1, 2, -3)$ ，并且与直线 $x=3+t, y=t, z=1-t$ 垂直的平面方程。

12. 设函数 $z =$ ，求全微分 $dz|_{(2,1)}$ 。

13. 设函数 $z = f(\cos(xy), 2x-y)$ ，其中 $f(u, v)$ 具有连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

14. 已知方程 $e^{xy} - 2z + x^2 - y^2 + e^z = 1$ 确定函数 $z = z(x, y)$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

15. 设函数 $z = e^x(x^2 + 2xy)$ ，求梯度 $\text{grad} f(x, y)$ 。

16. 计算二重积分 $\iint_D y^2 e^{-x^2} dx dy$ 。其中积分区域 D 是由直线 $y=x, x=1$ 及 x 轴所围成的区域。

17. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (1-x^2-y^2) dx dy dz$ ，其中积分区域 Ω 是由 $x^2+y^2=a^2, z=0$ 及 $z=2$ 所围成的区域。

18. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C x ds$ ，其中 C 是抛物线 $y=x^2$ 上由点 $A(0,0)$ 到点 $B(2,4)$ 的一段弧。

19. 验证对坐标的曲线积分 $\int_C (x+y)dx+(x-y)dy$ 与路径无关,

并计算 $I = \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$

20. 求微分方程 $x^2y'' = 2\ln x$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ 的敛散性.

22. 将函数 $f(x) = x \arctan x$ 展开为 x 的幂级数.

四、综合题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

23. 设函数 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

24. 求由曲面 $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ 及 $z = 0$ 所围在第一卦限的立体的体积.

25. 证明无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.