

浙江省 2011 年 10 月高等教育自学考试

微分几何试题

课程代码：10022

一、判断题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

判断下列各题，正确的在题后括号内打“√”，错的打“×”。

1. 曲面的克氏记号 Γ_{ij}^k 是曲面的内蕴量。()
2. 曲率挠率分别为不等于零的常数的曲线 Γ 是圆柱螺线。()
3. 曲面 S 为平面的充要条件是 $\mathbb{II}=0$ 。()
4. 曲面上的曲纹坐标网为共轭网的充要条件为 $M=0$ 。()
5. 可展曲面的平均曲率必为零。()

二、单项选择题(本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 已知曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 在 $\vec{r}(t_0)$ 点的挠率为 τ ，曲线在 $\vec{r}(t_0)$ 点附近是右旋的，则 τ 的值是()
A. -2
B. $\sqrt{2}$
C. $-\frac{\pi}{2}$
D. $-\sqrt{2}$
2. 曲线 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 在 $P(s)$ 点的基本向量为 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ 。在 P 点的曲率为 $k(s)$ ，挠率为 $\tau(s)$ ，则 $\tau(s)$ 是()
A. $\dot{\vec{\alpha}}\dot{\vec{\beta}}$
B. $\dot{\vec{\beta}}\dot{\vec{\gamma}}$
C. $\dot{\vec{\beta}}\dot{\vec{\alpha}}$
D. $\dot{\vec{\gamma}}\dot{\vec{\beta}}$
3. 对曲面的第一基本形式 $I=Edu^2+2Fdu dv+Gdv^2$ ， $EG-F^2$ 满足()
A. >0
B. <0
C. ≥ 0
D. ≤ 0
4. 在曲面的椭圆点处第二基本量 L 、 M 、 N 满足()
A. $LN-M^2>0$
B. $LN-M^2<0$
C. $LN-M^2=0$
D. $L=M=N=0$

5. $F=M=0$ 的充要条件是曲纹坐标网为()
- | | |
|---------|--------|
| A. 正交网 | B. 共轭网 |
| C. 曲率线网 | D. 渐进网 |
6. 曲面上使 $\kappa_n = \kappa_g = 0$ 的曲线不一定是()
- | | |
|--------|--------|
| A. 直线 | B. 渐近线 |
| C. 曲率线 | D. 测地线 |

三、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

- 向量函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 对任意 t 有 $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$ 的充要条件是_____。
- 已知曲线 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 在 P 点的单位切向量为 $\vec{\alpha} = \{0, 1, 0\}$, 单位主法向量 $\vec{\beta} = \{0, 0, 1\}$, 则曲线在 P 点的单位副法向量 $\vec{\gamma} =$ _____。
- 已知曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 有 $d\vec{r}^2 = 4du^2 + 2dudv + 3dv^2$, 则曲面的 $EG - F^2$ 是_____。
- 曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 上渐近曲线的微分方程是_____。
- 半径为 R 的球面的高斯曲率 $K =$ _____。

- 直纹面 $\vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u)$ 是可展曲面的充要条件是_____。

四、计算题(本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

- 求曲线 $x=1+3t+2t^2, y=2-2t+5t^2, z=1-t^2$ 的挠率和密切平面。
- 求平面族 $a^2x+2ay+2z=2a$ 的包络。
- 求曲面 $z=xy^2$ 的第一基本形式。
- 求正螺面 $\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, bv\}$ 的主曲率。
- 求曲面 $\Sigma: \vec{r} = \{t\cos\theta, t\sin\theta, t\}$ 的第二基本形式。

五、证明题(本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

- 如果曲线 $\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(s)$ 为一般螺线, $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 为 Γ 的切向量和主法向量, R 为 Γ 的曲率半径。证明 $\bar{\Gamma}: \vec{\rho} = R\vec{\alpha} - \int \vec{\beta} ds$ 也是一般螺线。
- 若曲线既是测地线又为曲率线, 则曲线是平面曲线。
- 证明一条曲线的所有切线不可能同时都是另一条曲线的切线。
- 证明在曲面 $z=f(x)+g(y)$ 上曲线族 $x=\text{常数}, y=\text{常数}$ 构成共轭网。
- 证明每一条曲线在它的主法线曲面上是渐近线。