全国2012年1月高等教育自学考试
线性代数（经管类）试题
课程代码：04184

说明：本卷中，$\boldsymbol{A}^{-1}$表示方阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，$r(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的秩，$\|\boldsymbol{\alpha}\|$表示向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度，$\boldsymbol{\alpha}^T$表示向量$\boldsymbol{\alpha}$的转置，$\boldsymbol{E}$表示单位矩阵，$|\boldsymbol{A}|$表示方阵$\boldsymbol{A}$的行列式.

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）

A．-6　　B．-3

C．3　　D．6

2．设矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{X}$为同阶方阵，且$\boldsymbol{A}$可逆，若$\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{X}$-$\boldsymbol{E}$）=$\boldsymbol{E}$，则矩阵$\boldsymbol{X}$=（　　）

A．$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$　　B．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$

C．$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$　　D．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$

3．设矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为可逆方阵，则以下结论正确的是（　　）

A. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$不可逆

C. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \\ & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$

4．设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_k$是 n 维列向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_k$线性无关的充分必要条件是（　　）

A．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_k$中任意两个向量线性无关

B．存在一组不全为 0 的数 l_1，l_2，…，l_k，使得 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k\neq\mathbf{0}$

C．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_k$中存在一个向量不能由其余向量线性表示

D．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_k$中任意一个向量都不能由其余向量线性表示

5．已知向量 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,-2,-2,-1)^T, 3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1,-4,-3,0)^T$, 则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=$（　　）

A．（0，-2，-1，1）^{T}　　B．（-2，0，-1，1）^{T}

C．（1，-1，-2，0）^{T}　　D．（2，-6，-5，-1）^{T}

6．实数向量空间 $V=\{(x, y, z)|3x+2y+5z=0\}$的维数是（　　）

A．1　　B．2

C．3　　D．4

7．设$\boldsymbol{\alpha}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则以下结论正确的是（　　）

A．$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解　　B．$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解

C．$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解　　D．$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解

8．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为$\frac{1}{2},\frac{1}{4},3$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为（　　）

A．$2,4,\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3}$

C．$\frac{1}{2},\frac{1}{4},3$　　D．2,4,3

9．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，则与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵是（　　）

A．$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

10．以下关于正定矩阵叙述正确的是（　　）

A．正定矩阵的乘积一定是正定矩阵　　B．正定矩阵的行列式一定小于零

C．正定矩阵的行列式一定大于零　　D．正定矩阵的差一定是正定矩阵

二、填空题（本大题共10小题，每空2分，共20分）

请在每小题的空格中填上正确答案，错填、不填均无分。

11．设 det ($\boldsymbol{A}$)=-1，det ($\boldsymbol{B}$)=2，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 det $((\boldsymbol{AB})^3)$=__________.

12．设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为3阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 t=__________.

13．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，这里 k 为正整数，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$=__________.

14．实向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的维数是__________.

15．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=r$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含解向量的个数为__________.

16．非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是__________.

17．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{\beta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})$=__________.

18．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为8，则 det（$-8\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$）=__________.

19．设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维单位长的列向量，则 $\|\boldsymbol{Px}\|$=__________.

20．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正惯性指数是__________.

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

21．计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

22．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

23．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,7,1,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(6,9,4,3)$, 求其一个极大线性无关组，并将其余向量通过极大线性无关组表示出来.

24．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

25．求下列齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases}x_1+x_3-5x_4=0\\ 2x_1+x_2-3x_4=0\\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}$$

26．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的秩.

四、证明题（本大题共 1 小题，6 分）

27．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ 的行列式不等于 0，证明：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{pmatrix}$$ 线性无关.