座位号：＿＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿

绝密★启用前

2022年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

2. 设A为3阶矩阵，$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则用$P$左乘$A$，相当于将$A$

A. 第1行的3倍加到第2行　　B. 第1列的3倍加到第2列

C. 第2行的3倍加到第1行　　D. 第2列的3倍加到第1列

3. 设向量组$\alpha_1=(2,1,-3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-4,k,6)^{\mathrm{T}}$线性相关，则数$k=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 设线性方程组$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+kx_2+x_3=k \\ x_1+x_2+kx_3=k^2 \end{cases}$ 无解，则数$k=$

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$的规范形为

A. $z_1^2+z_2^2$　　B. $z_1^2-z_2^2$　　C. $z_1^2-z_2^2-z_3^2$　　D. $z_1^2+z_2^2-z_3^2$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-3$，则$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}-2a_{11} & 4a_{12} \\ a_{21} & a_{23}-2a_{21} & 4a_{22} \\ a_{31} & a_{33}-2a_{31} & 4a_{32} \end{vmatrix}=$________.

7. 设$D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，则$D$的展开式中$x$的系数为________.

8. 设A为3阶可逆矩阵，且$|A|=2$，则$|-A^*|=$________.

9. 若矩阵A中有一个2阶子式不为零，且所有3阶子式均为零，则$r(A)=$________.

10. 已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,a)^{\mathrm{T}}$正交，则数$a=$________.

11. 设有向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与向量组 II：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. 若 I 线性相关，则 II 的线性相关性为________.

12. 设齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解，则数$k$应满足的条件是________.

13. 设A为n阶可逆矩阵，且满足$|2A-E|=0$，则A^{-1}必有一个特征值为________.

14. 设2阶矩阵A的特征值为$2,5$，则$|A+E|=$________.

15. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+(a-2)x_3^2+4x_1x_2$正定，则数$a$应满足的条件是__________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}$的值.

17. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$B=(1,2,3)$，$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$AB-(BA)C^{\mathrm{T}}$

18. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.（1）求$A^{-1}$；（2）解矩阵方程$AX=B$.

19. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,2,4,-3)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

20. 设非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1 \\ x_2-x_3=-1 \\ x_1+x_3=a \end{cases}$，当常数$a$为何值时，方程组有无穷多解？并求其通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，判定$A$是否可以相似对角化？并说明理由.

22. 求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+c_1\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_2+c_2\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_3+c_3\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关（其中$c_1,c_2,c_3$是任意常数）.