绝密★启用前

2023年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1．本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。

2．应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。

3．涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$M_{ij}$为元素$a_{ij}(i,j=1,2)$的余子式，若$M_{11}=2, M_{12}=3$，$M_{21}=4, M_{22}=5$，则$A=$

A. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

2．设A为2阶矩阵，若已知$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则$A^*=$

A. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

3．设线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解，则$k$的值为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4．设n阶矩阵A满足$|3E+2A|=0$，则A必有一个特征值$\lambda=$

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

5．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+5x_3^2$的正惯性指数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6．行列式 $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} =$________.

7．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$B=(1,0)$，则 $AB=$ ___________.

8．设 A 为 2 阶矩阵，若存在矩阵 $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $C^{T}AC=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A=$ _______.

9．设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|-2A^{-1}|=$________.

10．向量组 $\alpha_1=(2,0,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,-2,4)^T$，$\alpha_3=(0,1,-4,3)^T$ 的秩为________.

11．齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \quad\quad =0 \\ \quad\quad x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为________.

12．若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵经初等行变换化为 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$，则方程组的通解是 __________.

13．设 A 为 2 阶矩阵，且 $|A|=8$，若 A 的一个特征值为 2，则 A 的另一个特征值为________.

14．若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可与对角矩阵相似，则数 $a=$________.

15．二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1x_2$ 的规范形为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+x \\ a_1 & a_2+x & a_3 \\ a_1+x & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

17．设 A 为 3 阶矩阵，且已知 $|A|=2$，求行列式 $\left|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^{*}\right|$ 的值.

18．设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足关系式 $AX=A^{T}-2X$，求 X.

19．求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,-1,-3)^T$，$\alpha_3=(1,-2,8,8)^T$，$\alpha_4=(2,3,8,9)^T$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

20．确定当数 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=a \end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 可以对角化，$\lambda=2$ 为 A 的 2 重特征值，求 x,y 的值.

22．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$，求正交变换 $x=Py$，将二次型化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23．设 3 阶矩阵 A,B 满足关系式 $2AB-A-2B=O$．证明 $A-E$ 可逆.