

2024年4月高等教育自学考试全国统一考试

复变函数与积分变换

(课程代码 02199)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共12小题, 每小题3分, 共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 复数 $z = i(1-i)$ 的辐角主值是

- A. $-\frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

2. 方程 $|z+2-3i| = \sqrt{2}$ 所表示的曲线为

- A. 圆 B. 双曲线
C. 椭圆 D. 抛物线

3. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 $z=0$ 处

- A. 解析 B. 可导
C. 可微 D. 连续

4. 复数 $z = 2i$ 的对数主值 $\ln z =$

- A. $\ln 2 - i\pi$ B. $\ln 2 - i\frac{\pi}{2}$
C. $\ln 2 + i\frac{\pi}{2}$ D. $\ln 2 + i\pi$

5. 设 C 是正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C \frac{\sin z}{(1-z)^2} dz =$

- A. $2\pi i \sin 1$ B. $2\pi i \cos 1$
C. $\sin 1$ D. $\cos 1$

6. 设 a 为实数, 若 $u(x, y) = y^3 + ax^2y$ 是平面上的调和函数, 则 $a =$

- A. -3 B. -2
C. 2 D. 3

7. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ 的和为

- A. $-e$ B. $-\frac{1}{e}$
C. $\frac{1}{e}$ D. e

8. $z=0$ 是函数 $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$ 的

- A. 可去奇点 B. 1阶极点
C. 2阶极点 D. 本性奇点

9. 设 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的1阶零点, 则留数 $\text{Res}\left[\frac{1}{f(z)}, z_0\right] =$

- A. 0 B. $f'(z_0)$
C. $f(z_0)$ D. $\frac{1}{f'(z_0)}$

10. 分式线性映射 $w = \frac{2z-1}{2-z}$ 把圆周 $|z|=1$ 映射为

- A. $|w|=1$ B. $|w|=2$
C. $|w-1|=1$ D. $|w-1|=2$

11. 设 $f(t)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[f(-t)] =$

- A. $-F(-\omega)$ B. $F(-\omega)$
C. $-F(\omega)$ D. $F(\omega)$

12. 函数 $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ 的拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[f(t)] =$

- A. $\frac{3}{(p+2)^2+9}$ B. $\frac{p+2}{(p+2)^2+9}$
C. $\frac{3}{(p-2)^2+9}$ D. $\frac{p-2}{(p-2)^2+9}$

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13. 复数 $z = \frac{(3-4i)(\sqrt{3}+i)}{(1-2i)(2+i)}$ 的模为_____.

14. 设 $z = x+iy$, $f(z) = -y+ix$, 则 $f'(z) =$ _____.

15. 积分 $\int_0^{1-i} z \, dz =$ _____.

16. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^n$ 的收敛半径为_____.

17. 映射 $w = z^2 + 4z$ 在点 $z_0 = \frac{3}{2}i$ 处的伸缩率是_____.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18. 求 $\sqrt[3]{8}$.

19. 求积分 $I = \int_C |z|^2 \, dz$, 其中积分曲线 C 为从原点 O 到点 $1+i$ 的直线段.

20. 求积分 $I = \int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)} \, dz$.

21. 将函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内展开为洛朗级数.

22. 求一个函数 w , 它把带形区域 $0 < \text{Im } z < \pi$ 保形映射为单位圆的内部.

23. 求函数 $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的傅里叶变换.

四、综合题：本大题共 3 小题，第 24、25 题各 6 分，第 26 题 7 分，共 19 分。

24. 讨论函数 $f(z) = |z|^2$ 的可导性与解析性.

25. 利用留数计算实积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \, dx$.

26. 已知调和函数 $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$, 求解析函数 $f(z) = u + iv$ 满足 $f(i) = -1+i$.