

2024年10月高等教育自学考试全国统一考试

## 高等数学(一)

(课程代码 00020)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

## 第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共10小题, 每小题3分, 共30分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 函数  $f(x) = \ln x - \ln(x-2)$  的定义域是
  - A.  $(-2, +\infty)$
  - B.  $(0, +\infty)$
  - C.  $(2, +\infty)$
  - D.  $(0, 2)$
2. 函数  $y = \frac{x-1}{x+1} (x > 1)$  的反函数为
  - A.  $y = \frac{1+x}{1-x} (0 < x < 1)$
  - B.  $y = \frac{1-x}{1+x} (0 < x < 1)$
  - C.  $y = \frac{1+x}{1-x} (-1 < x < 1)$
  - D.  $y = \frac{1-x}{1+x} (-1 < x < 1)$
3. 若  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , 则必定有
  - A.  $f(1) = 0$
  - B.  $f(1) \neq 0$
  - C.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$
  - D.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq 0$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+2}{2x+1} =$

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D.  $\frac{1}{2}$

5. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x - \sin x$  与  $x^n$  是同价无穷小量, 则  $n =$ 

- A. 1
- B. 3
- C. 2
- D. 4

6. 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 则

- A.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$
- B.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = 2f'(a)$
- C.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{h} = 2f'(a)$
- D.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-2h)}{2h} = 2f'(a)$

7. 下列函数中为单调函数的是

- A.  $x^2 - x$
- B.  $|x|$
- C.  $e^{-x}$
- D.  $\sin x$

8. 若  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

- A.  $\int F(x) dx = f(x) + C$
- B.  $\int f(x) dx = F(x) + C$
- C.  $\int f'(x) dx = F(x) + C$
- D.  $\int F'(x) dx = f(x) + C$

9. 设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ , 则

- A.  $I_1 < I_2$
- B.  $I_1 = I_2$
- C.  $I_1 > I_2$
- D.  $I_1$  与  $I_2$  的大小关系无法判定

10. 设  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , 则  $f\left(\frac{y}{x}, 1\right) =$ 

- A.  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$
- B.  $\frac{x^2 + y^2}{xy}$
- C.  $\frac{x}{x^2 + 1}$
- D.  $\frac{x}{1 + x^4}$

## 第二部分 非选择题

二、简单计算题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11. 设  $a_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

12. 求曲线  $y = \frac{4x-1}{(x-2)^2}$  的水平渐近线。

13. 设  $y = x^2 + 2^x$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。

14. 计算  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ 。

15. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = 2(x-1)(1+y^2)$  的通解。

三、计算题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

16. 设函数  $f(x) = \begin{cases} k - e^x, & x > 0 \\ 3x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，在  $x = 0$  处连续，试求常数  $k$ 。

17. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ 。

18. 计算  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} - 1} dx$ 。

19. 求  $z = \ln \frac{y}{x}$  在点  $(1, -1)$  处的全微分。

20. 设  $F(x) = \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$ ，求  $F'(\frac{\pi}{2})$ 。

四、综合题：本大题共 4 小题，第 21、22、23 小题各 6 分，第 24 小题 7 分，共 25 分。

21. 设平面图形由曲线  $y = e^x$  及直线  $y = e$ ， $x = 0$  所围成。

(1) 求该平面图形的面积；

(2) 求该平面图形绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积。

22. 计算  $\iint_D x^3 y^2 dx dy$ ，其中区域  $D$  为  $0 \leq x \leq 1$ ， $-1 \leq y \leq 1$ 。

23. 求  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$  的极值。

24.  $A, B$  两种产品的销售单价分别是 10 千元与 9 千元，生产  $x$  单位的  $A$  产品与生产  $y$  单位的  $B$  产品的总费用是  $400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$  千元。问当  $A$  与  $B$  产品的产量分别为多少时，能获得的利润最大？并求最大利润。