

2024年10月高等教育自学考试全国统一考试

线性代数

(课程代码 02198)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共5小题, 每小题2分, 共10分。在每小题列出的备选项中

只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$
 - A. -1
 - B. 0
 - C. 1
 - D. 2
2. 设2阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 且已知 $|A| = -1$, 则 $A^{-1} =$
 - A. $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
 - B. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
 - C. $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$
 - D. $\begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$

3. 在 R^3 中, 与向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ 正交的向量是

- A. $(-1, 0, 1)^T$
- B. $(-2, 0, 1)^T$
- C. $(1, 0, -2)^T$
- D. $(1, 0, 1)^T$

4. 设 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的两个解, 则下列向量中仍为方程组 $Ax = \beta$ 解的是

- A. $\beta_1 + \beta_2$
- B. $\beta_1 - \beta_2$
- C. $\frac{3\beta_1 - 2\beta_2}{3}$
- D. $\frac{2\beta_1 + \beta_2}{3}$

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的特征值为

- A. 1, 0, 1
- B. 1, 1, 2
- C. -1, 1, 2
- D. -1, 1, 1

第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共10小题, 每小题2分, 共20分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ 中(2,3)元素的代数余子式 A_{23} 的值为_____.
7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $|A^T A| =$ _____.
8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B = A - E$, 则 $r(B) =$ _____.
9. 设向量组 $\alpha_1 = (3, 1, k)$, $\alpha_2 = (4, k, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, k)$ 线性无关, 则 k 的取值应满足_____.

10. 将 $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 单位化, 得到单位向量为_____.

11. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系中解向量的个数为_____.

12. 设 $\lambda = 3$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值, 则 A^{-1} 必有一个特征值为_____.

13. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $t =$ _____.

14. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 的矩阵 A 有 3 个特征值 1, 2, 3, 则二次型 f 在正交变换下的标准形为_____.

15. 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则对应的二次型 $f(x_1, x_2)$ 为_____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分.

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

17. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 (1) $A+B$; (2) $3A-2B$.

18. 设矩阵 A, B, X 满足关系式 $AX = B + X$, 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 求矩阵 X .

19. 求向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ 的一个极大无关

组, 并将向量组 A 中的其余向量用极大无关组线性表示.

20. 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 20 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$.

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

22. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 确定参数 t 为何值时, 该二次型正定.

四、证明题: 本大题共 1 小题, 每小题 7 分, 共 7 分.

23. 设 A 为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位矩阵, 且满足 $(A+E)^2 = O$, 证明: A 可逆并求 A^{-1} .