

2024年10月高等教育自学考试全国统一考试

复变函数与积分变换

(课程代码 02199)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共12小题, 每小题3分, 共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 下列式子中正确的是

- A. $1-2i > -1-3i$ B. $\text{Im}(1-2i) > \text{Re}(-1-3i)$
 C. $|1-2i| > |-1-3i|$ D. $\arg(1-2i) > \arg(-1-3i)$

2. $(-1-i)^{100} =$

- A. $-2^{50} - 2^{50}i$ B. -2^{50}
 C. $2^{50} + 2^{50}i$ D. 2^{50}

3. 在复数域内, 下列选项中为实数的是

- A. $(1-i)^2$ B. i^{1+i}
 C. $\cos i$ D. $\sqrt[3]{-8}$

4. 函数 $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ 在区域 $|z| < 3$ 内的奇点个数为

- A. 1 B. 2
 C. 3 D. 4

5. 积分 $\int_{-2}^{1+3i} (z-1)^2 dz =$

- A. $-27-27i$ B. $-9-9i$
 C. $9-9i$ D. $27-27i$

6. 下列选项中, 积分值不为零的是

- A. $\int_{|z|=2} z^3 \cos z dz$ B. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} dz$
 C. $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{e^z} dz$ D. $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z-3} dz$

7. 设 a, b 为实数, 若 $u(x, y) = ax^2 + xy + by^2$ 为平面上的调和函数, 则 a, b 满足

- A. $a+b=0$ B. $a-b=0$
 C. $a+b=1$ D. $a-b=1$

8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! 2^n}$ 的和函数是

- A. e^{-z} B. $e^{-\frac{z}{2}}$
 C. $e^{\frac{z}{2}}$ D. e^z

9. 设函数 $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$, 则留数 $\text{Res}[f(z), 0] =$

- A. $2\pi i$ B. -1
 C. 0 D. 1

10. 点 $z_0 = 0$ 是函数 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ 的

- A. 可去奇点 B. 1阶极点
 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点

11. 函数 $f(z) = z^3 + 3z^2 + 6z$ 在点 $z_0 = 1+i$ 处的旋转角为

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$
 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

12. 设 $f(t)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, 若 $f'(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

连续, 则 $f'(t)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f'(t)] =$

- A. $-\omega F(i\omega)$ B. $-i\omega F(\omega)$
 C. $\omega F(-i\omega)$ D. $i\omega F(\omega)$

第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

13. $|(\sqrt{5} - 2i)^2| =$ _____.

14. 设函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$, 则 $f'(0) =$ _____.

15. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3} + i)^n} (z - i)^n$ 的收敛域为 _____.

16. 函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ 的极点 0 的阶为 _____.

17. 若 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p^2 + p - 1}$, 则 $\mathcal{L}[e^{-2t} f(t)] =$ _____.

三、计算题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

18. 设 $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, 求复数 $z_1 z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$ 的代数形式.

19. 设 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 是复平面上的解析函数, 求实数 m, n, l 的值.

20. 计算积分 $\int_{|z|=3} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$.

21. 设 $f(z) = \oint_{|\xi|=2} \frac{e^{\pi\xi}}{\xi - z} d\xi$, 求 $f(i)$ 和 $f(3i)$.

22. 求函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 在点 $z_0 = 2$ 处的泰勒级数展开式, 并指出其收敛域.

23. 求指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 的傅里叶变换.

四、综合题: 本大题共 3 小题, 第 24、25 题各 6 分, 第 26 题 7 分, 共 19 分。

24. 利用棣莫弗公式, 将 $\sin 3\theta$ 和 $\cos 3\theta$ 分别用 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 表示.

25. 利用留数求函数 $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$ 的拉普拉斯逆变换.

26. 利用拉普拉斯变换求解常微分方程 $y'(t) - y(t) = e^{2t}$, $y(0) = 0$.