

## 概率论与数理统计（经管类）

（课程代码 04183）

## 注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

## 第一部分 选择题

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 从装有三个白球和两个红球的袋中任取两个球，事件 $A$ 表示“取到两个红球”，则 $\bar{A}$ 表示
  - A. 取到两个白球
  - B. 至少取到一个红球
  - C. 没有取到红球
  - D. 至少取到一个白球
2. 设 $A, B$ 为随机事件， $P(A) = P(B) > 0$ ，则下列结论成立的是
  - A.  $A = B$
  - B.  $P(B|A) = 1$
  - C.  $P(B|A) = P(A|B)$
  - D.  $P(B|A) + P(A|B) = 1$
3. 设随机变量 $X$ 的概率密度 $f(x)$ 是偶函数，则对任意 $a > 0$ ， $P\{|X| > a\} =$ 
  - A.  $2[1 - F(a)]$
  - B.  $2F(a) - 1$
  - C.  $2F(a)$
  - D.  $1 - 2F(a)$
4. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$ ，则下列等式成立的是
  - A.  $P\{X+Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$
  - B.  $P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$
  - C.  $P\{X-Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$
  - D.  $P\{X-Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

5. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 不相关，且  $\frac{X}{P} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{matrix}$ ,  $\frac{Y}{P} \begin{matrix} -2 & -1 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{matrix}$ ，则 $E(XY) =$

- A. -0.99
- B. -0.2
- C. 0.99
- D. 2

6. 某部件包括9部分，每部分的长度（单位： $mm$ ）是随机变量，它们相互独立，且服从同一分布，其数学期望为2，标准差为 $\frac{1}{30}$ ，规定总长度在区间 $(17.9, 18.1)$ 内部件合格。 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，且 $\Phi(1) = 0.8413$ ，则该部件合格的概率约为

- A. 0.1587
- B. 0.3174
- C. 0.6826
- D. 0.8413

7. 设总体 $X \sim N(1, 9)$ ， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，则在下列随机变量中服从标准正态分布的是

- A.  $\frac{\bar{X}-1}{9}$
- B.  $\frac{\bar{X}-1}{3}$
- C.  $\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{3}}$
- D.  $\bar{X}-1$

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $\sigma^2$ 已知，当置信度 $1-\alpha$ 保持不变时，如果样本容量 $n$ 增大，则 $\mu$ 的置信区间

- A. 长度变大
- B. 长度变小
- C. 长度不变
- D. 长度变化不确定

9. 假设检验中的显著性水平 $\alpha$ 表示

- A. 原假设 $H_0$ 不成立，拒绝 $H_0$ 的概率
- B. 原假设 $H_0$ 成立，但拒绝 $H_0$ 的概率
- C. 原假设 $H_0$ 不成立，但未拒绝 $H_0$ 的概率
- D. 不超过0.05的一个数，无具体意义

10. 设线性回归模型 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ， $E(\varepsilon_i) = 0, D(\varepsilon_i) = \sigma^2 (i=1, 2, \dots, n)$ ，且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 相互独立，记 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ， $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ，则 $\beta_1$ 的最小二乘估计为

- A.  $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
- B.  $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$
- C.  $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$
- D.  $\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$

## 第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分。

11. 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立，且  $P(A)=p$ ， $P(B)=q$ ，则  $P(\bar{A}B)=$ \_\_\_\_\_.
12. 某人做试验，成功的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ )，则此人在三次独立重复试验中至少失败一次的概率为\_\_\_\_\_.
13. 设随机变量  $X \sim B(2, 0.1)$ ，则  $P\{X > 1\} =$ \_\_\_\_\_.
14. 设随机变量  $X$  服从区间  $[1, 5]$  上的均匀分布，则  $P\{-1 < X \leq 3\} =$ \_\_\_\_\_.
15. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f_x(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  且  $P\{X < a\} = P\{X > a\}$ ，则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.

16. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0.1	0.2

则  $P\{X \neq Y\} =$ \_\_\_\_\_.

17. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立，且都服从正态分布  $N(-2, 1)$ ，记  $Z = X - Y$ ，则  $Z$  的概率密度  $f_z(z) =$ \_\_\_\_\_.
18. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立， $X$  服从参数为 3 的指数分布， $Y$  服从参数为 4 的指数分布，则  $P\{0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1\} =$ \_\_\_\_\_.
19. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $D(1-X) =$ \_\_\_\_\_.
20. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立，且  $E(X) = E(Y) = 1$ ， $D(X) = 2$ ， $D(Y) = 4$ ，则  $E[(X+Y)^2] =$ \_\_\_\_\_.
21. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  为来自总体  $X$  的样本，且  $X \sim N(\mu, 2^2)$ ， $\bar{X}$  为样本均值，则  $E(\bar{X} - \mu)^2 =$ \_\_\_\_\_.
22. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本，且  $X \sim N(0, 1)$ ，若  $\sum_{i=1}^n X_i^2$  服从自由度为 10 的卡方分布  $\chi^2(10)$ ，则  $n =$ \_\_\_\_\_.

23. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本，且  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $\bar{X}$  为样本均值， $S^2$  为样本方差，则  $E(\bar{X} + S^2) =$ \_\_\_\_\_.
24. 设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, 0.81)$ ，由来自  $X$  的容量为 9 的样本计算得样本均值  $\bar{x} = 5$ ， $\Phi(x)$  为标准正态分布函数，且  $\Phi(1.96) = 0.975$ ，则未知参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信下限是\_\_\_\_\_.
25. 设某假设检验的拒绝域为  $W$ ，当原假设  $H_0$  成立时，样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W$  的概率为 0.01，则犯第一类错误的概率为\_\_\_\_\_.

三、计算题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

26. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.1	$b$
1	$a$	0.2
2	0.1	0.2

且  $P\{Y=1|X=0\} = 0.5$ 。求：(1) 常数  $a, b$ ；(2)  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘分布律。

27. 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布， $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自  $X$  的样本， $\bar{X}$  为样本均值。(1) 求  $\lambda$  的极大似然估计  $\hat{\lambda}$ ；(2)  $\hat{\lambda}$  是  $\lambda$  的无偏估计吗？为什么？

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分。

28. 设随机变量  $X$  服从区间  $[-a, a]$  上的均匀分布，其中  $a > 0$ ，且  $P\{|X| > 1\} = P\{|X| < 1\}$ ，又记  $Y = -3X + 1$ 。  
求：(1) 常数  $a$ ；(2)  $X$  的分布函数  $F_X(x)$ ；(3)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ 。

29. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立， $X$  的概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$   $Y$  服从区间  $[0, 4]$  上的均匀分布。  
求：(1)  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ ；(2)  $E(X), D(X)$ ；(3)  $E(X - Y + 3), D(X - Y + 3)$ 。

五、应用题：本题 10 分。

30. 已知一批产品中有 95% 是合格品，检查产品质量时，一件合格品被误判为次品的概率为 0.02，一件次品被误判为合格品的概率为 0.04。  
求：(1) 任意抽查一件产品，它被判为次品的概率；  
(2) 一件经检查被判为次品的产品确实是次品的概率。