座位号：________

姓名：________

绝密★启用前

2024年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数（经管类）

（课程代码　04184）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 若行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-3$，则$\begin{vmatrix} a_1 & 3a_1+2b_1-c_1 & c_1 \\ a_2 & 3a_2+2b_2-c_2 & c_2 \\ a_3 & 3a_3+2b_3-c_3 & c_3 \end{vmatrix}=$

A. -18　　B. -6

C. 6　　D. 18

2. 设3阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，则$A^2$的秩为

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组(II)：$\beta_1,\beta_2$等价，则必有

A. 向量组(I)线性无关　　B. 向量组(II)线性相关

C. 向量组(II)线性无关　　D. 向量组(I)线性相关

4. 若齐次线性方程组$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-3y+z=0 \\ -x+y-\lambda z=0 \end{cases}$有非零解，则数$\lambda$的值为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 设3阶实矩阵A与矩阵$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似，则下列矩阵中可逆的是

A. $A+E$　　B. $A-E$　　C. $\sqrt{2}E+A$　　D. $\sqrt{2}E-A$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 10\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}$，则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$________.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=12$，则 $|-3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=$ ________.

9. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,6,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则数 $t=$________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系所含解向量的个数为________.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ \lambda+1\end{pmatrix}$，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，则数 $\lambda=$________.

12. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 相似，则数 $k=$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,3,t)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则数 $t=$________.

14. 若 $\begin{pmatrix}a & 2 & 0\\ 2 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则数 a 的取值范围为________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的矩阵为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 0 & -1\end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1\ \ 2\ \ 0)$. 求（1）$\boldsymbol{AB}$；（2）$(\boldsymbol{AB})^{2024}$.

18. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.（1）求 $\boldsymbol{A}^{-1}$；（2）解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

19. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(4,10,10)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

20. 确定数 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=1\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=3\\ 4x_1+5x_2-x_3+x_4=a\end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 已知 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & a & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.（1）求数 a 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值；（2）问 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化？请说明理由.

22. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，确定数 a 的值并求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 将二次型化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.