

2025 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)

(课程代码 00023)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 已知两点 $A(0, -1, 2)$ 和 $B(1, 1, -1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 垂直的向量是
 - A. $\{1, -1, 1\}$
 - B. $\{1, -1, -1\}$
 - C. $\{-1, -1, 1\}$
 - D. $\{1, 1, 1\}$
2. 设函数 $z = x^y$, 则全微分 $dz =$
 - A. $x^y \ln x dx + y x^{y-1} dy$
 - B. $y x^{y-1} (dx + dy)$
 - C. $x^y \ln x (dx + dy)$
 - D. $y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy$
3. 下列函数中是微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解的是
 - A. $y = \frac{C}{x} + x$
 - B. $y = Cx + \frac{1}{x}$
 - C. $y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$
 - D. $y = Cx + \frac{x}{2}$

4. 设常数 $a \neq 0$, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$
 - A. 发散
 - B. 收敛
 - C. 可能发散, 也可能收敛
 - D. 收敛性由 a 值确定

5. 设积分区域 $D: -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$, 则二重积分 $\iint_D (x + y - 2) dx dy =$
 - A. -6
 - B. -4
 - C. 0
 - D. 4

6. 将 Oyz 平面上的曲线 $y^2 + 4z^2 = 16$ 绕 y 轴旋转一周, 所得旋转曲面方程是
 - A. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$
 - B. $y^2 + 4(x^2 + z^2) = 16$
 - C. $(x + y)^2 + 4z^2 = 16$
 - D. $y^2 + 4(x + z)^2 = 16$

7. 下列点是函数 $z = 4(x + y) - x^2 + y^2$ 的驻点的是
 - A. $(2, -2)$
 - B. $(2, 0)$
 - C. $(0, 2)$
 - D. $(2, 2)$

8. 设积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} (2x + y + 4z + 3) dx dy dz =$
 - A. $\frac{32}{3}\pi$
 - B. 16π
 - C. 32π
 - D. 96π

9. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的和是

- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. 2
- D. $\frac{3}{2}$

10. 设 C_1, C_2 是任意常数, 则微分方程 $y'' = \sin x$ 的通解是

- A. $y = -\cos x + C_1 x + C_2$
- B. $y = -\sin x + C_1 x + C_2$
- C. $y = -\sin x + C_1$
- D. $y = -\cos x + C_1$

第二部分 非选择题

二、计算题:本大题共 10 小题,每小题 6 分,共 60 分。

11. 求过点 $P(0, 2, -1)$ 且与平面 $x + 3y - 4z - 6 = 0$ 垂直的直线方程。
12. 求两平面 $2x - y - 2z + 6 = 0$ 和 $4x + y - z + 9 = 0$ 的夹角 φ 。

13. 求曲线 $x = t^3, y = 1 - 3t, z = 2t^2 - 1$ 在点 $P(1, -2, 1)$ 处的法平面方程.
14. 求函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $P(1, 1, -1)$ 处的梯度.
15. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^4 - 2x^2y^2z^2 = 1$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.
16. 计算二重积分 $\iint_D e^{x^2+y} dx dy$, 其中积分区域 D 是由 $x + y = 2, y = x$ 及 $y = 0$ 所围的闭区域.
17. 计算对弧长的曲线积分 $I = \int_L (x^2 + 3y^2 - 4) ds$, 其中 L 为半圆 $x = \sqrt{4 - y^2}$.
18. 计算对坐标的曲线积分

$$I = \oint_L (2xe^{x^2+y} + x^2y - y^2 + 1) dx + (e^{x^2+y} - xy^2 + 3y) dy,$$

其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 沿逆时针方向.

19. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在区间 $[-\pi, \pi)$ 上表达式为 $f(x) = |x|$, 其傅里叶级数展

开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, 求系数 a_3 .

20. 验证 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' - y \ln y = 0$ 的一个特解, 并求该微分方程满足初始条件

$y|_{x=1} = e^2$ 的特解.

三、综合题: 本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分。

21. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ 的收敛域.

22. 计算对坐标的曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (2x + y + z) dx dz$, 其中 Σ 是平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截得部分平面的右侧.