座位号：________

姓名：________

机密★启用前

2025年4月高等教育自学考试全国统一考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 5a_{11}+2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 5a_{21}+2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 5a_{31}+2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 D_1 的值为

A. -15　　B. -6

C. 6　　D. 15

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则行列式 $|-2\boldsymbol{A}^{-1}|=$

A. -4　　B. -1

C. 1　　D. 4

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解，k 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解是

A. $k\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $k\boldsymbol{\alpha}_2$

C. $k\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{2}$　　D. $k\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}{2}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则与 $\boldsymbol{A}$ 有相同特征值的矩阵为

A. $\boldsymbol{A}^T$　　B. $\boldsymbol{A}^2$

C. $\boldsymbol{A}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{A}^*$

5. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则对应的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 为

A. $x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2-2x_2x_3$　　B. $x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3$

C. $x_1^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3$　　D. $x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=$______.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=$______.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$______.

9. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{E}$，则行列式 $|\boldsymbol{AB}|=$______.

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=$______.

11. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的线性关系为线性______.

12．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$的基础解系中解向量的个数为______．

13．设矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，若$\boldsymbol{A}$有一个特征值为3，则$\boldsymbol{B}$必有一个特征值为______．

14．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值之和为______．

15．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的矩阵$\boldsymbol{A}$有3个特征值$1,-2,4$，则二次型$f$在正交变换下的标准形为$f=$______．

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．计算4阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$．

17．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$，

(1)求$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$；(2)求$\boldsymbol{X}$．

18．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$．

19．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$，求该向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表出．

20．求线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=3 \\ x_1+4x_2-x_3=-2 \\ x_1+2x_2+3x_3=8 \end{cases}$的通解．

21．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$，(1)求$\boldsymbol{A}$的特征值；(2)求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$为对角矩阵．

22．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，若$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型，求出$t$的取值范围．

四、证明题：本大题共1小题，每小题7分，共7分。

23．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，并且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，证明$|\boldsymbol{A}|=0$．