座位号：

姓名：

机密★启用前

2025年4月高等教育自学考试全国统一考试

复变函数与积分变换

（课程代码　02199）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共12小题，每小题3分，共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 下列复数的三角形式中，表示$1-\mathrm{i}$的是

A. $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$　　B. $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$

C. $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4})$　　D. $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4})$

2. 设$D=\{z\,|\,|z-\mathrm{i}|>1\}$，则$D$为

A. 有界多连通区域　　B. 无界多连通区域

C. 有界单连通区域　　D. 无界单连通区域

3. 极限$\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{2z}{z^2-1}=$

A. $-\mathrm{i}$　　B. i

C. 0　　D. 1

4. 对于任意非零复数z_1和z_2，下列表达式一定成立的是

A. $\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2$　　B. $\ln(z_1/z_2)=\ln z_1-\ln z_2$

C. $\mathrm{e}^{z_1z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}$　　D. $|\sin z_1|\le 1$

5. 积分$\int_{|z|=2}\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z=$

A. $-2\pi\mathrm{i}$　　B. 0

C. $\pi\mathrm{i}$　　D. $2\pi\mathrm{i}$

6. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+5\mathrm{i})^n}{n!}$的敛散性是

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 无法判定

7. 函数$f(z)=\dfrac{1}{z(z-\mathrm{i})}$在点i处展开成洛朗级数的最大的去心邻域为

A. $|z-\mathrm{i}|<\frac{1}{2}$　　B. $0<|z-\mathrm{i}|<\frac{1}{2}$

C. $|z-\mathrm{i}|<1$　　D. $0<|z-\mathrm{i}|<1$

8. 设$z=z_0$分别为函数$f(z)$和$g(z)$的m阶零点和n阶零点，若$m<n$，则$z=z_0$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的

A. 可去奇点　　B. $m-n$阶极点

C. $n-m$阶极点　　D. 本性奇点

9. 映射$w=z^2+2z$将z平面上缩小的最大区域为

A. $|z|<\frac{1}{2}$　　B. $|z+1|<\frac{1}{2}$

C. $|z|>\frac{1}{2}$　　D. $|z+1|>\frac{1}{2}$

10. 分式线性映射$w=\dfrac{2z-1}{2-z}$把单位圆周$|z|=1$映射为

A. $|w|=1$　　B. $|w|=2$

C. $|w-1|=1$　　D. $|w-1|=2$

11. 设$f(t)$的傅里叶变换$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则$F(t)$的傅里叶变换$\mathscr{F}[F(t)]=$

A. $-2\pi f(\omega)$　　B. $f(-\omega)$

C. $2\pi f(-\omega)$　　D. $2\pi f(\omega)$

12．设 $f(t), f'(t)$ 的拉普拉斯变换都存在，记 $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$，则 $\mathscr{L}[f'(t)]=$

A．$pF(p)$　　B．$pF(p)+f(0)$

C．$F(p)-f(0)$　　D．$pF(p)-f(0)$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13．设复数 $z=(2-3\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})$，则 $\operatorname{Im}(z)=$__________.

14．设函数 $f(z)=(x^2+2y)+\mathrm{i}\,2xy$，则 $f'(1-\mathrm{i})=$__________.

15．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}z^n$ 的收敛半径为__________.

16．积分 $\int_{|z|=1}\frac{1}{\sin z}\mathrm{d}z=$__________.

17．δ 函数的傅里叶变换 $\mathscr{F}[\delta(t)]=$__________.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18．求复数 $z=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{12}$ 的值.

19．求方程 $\mathrm{e}^z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的解.

20．计算积分 $\int_C \operatorname{Im} z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为从点 0 到点 $2+2\mathrm{i}$ 的直线段.

21．将函数 $f(z)=\frac{1}{z}e^{z^2}$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

22．已知函数 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0,\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\ge 0.\end{cases}$ 求卷积 $f_1(t)*f_2(t)$.

23．利用拉普拉斯变换的定义求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{2t}$ 的拉普拉斯变换.

四、综合题：本大题共 3 小题，第 24、25 题各 6 分，第 26 题 7 分，共 19 分。

24．讨论函数 $f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2\,\mathrm{i}$ 的可导性与解析性.

25．（1）求函数 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}$ 在孤立奇点 $z_1=\mathrm{i}$ 和 $z_2=-\mathrm{i}$ 处的留数；

（2）利用留数计算实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

26．已知 $v(x,y)=(x-1)^2-y^2$ 为调和函数，求满足 $f(1)=0$ 的解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.