

离散数学

(课程代码 02324)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 15 小题, 每小题 2 分, 共 30 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 P : 今天下雨, Q : 我去登山。命题“如果今天不下雨, 我就去登山”可符号化为
A. $\neg P \rightarrow Q$ B. $P \rightarrow Q$
C. $\neg P \wedge Q$ D. $P \vee \neg Q$
2. 下列命题公式是矛盾式的是
A. $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ B. $(P \vee Q) \rightarrow Q$
C. $(P \rightarrow Q) \wedge Q$ D. $(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$
3. 设命题公式 A 为重言式且含有 3 个命题变元, 则 A 的主析取范式含小项的个数为
A. 1 B. 4
C. 8 D. 10
4. 设论域为整数集, 真值为真的命题是
A. $\forall x \forall y (x + y = 0.5)$ B. $\forall x \exists y (x + y = 18)$
C. $\exists x \exists y (x^2 + y^2 = 3)$ D. $\exists x \forall y (x + y = 18)$
5. 设 $R(x)$: x 是质数, $G(x, y)$: x 大于 y 。命题“没有最大的质数”可符号化为
A. $\forall x (R(x) \rightarrow (\exists y) (R(y) \wedge G(x, y)))$
B. $\forall x (R(x) \rightarrow (\exists y) (R(y) \wedge G(y, x)))$
C. $\exists x (R(x) \rightarrow (\exists y) (R(y) \rightarrow G(x, y)))$
D. $\exists x (R(x) \rightarrow (\forall y) (G(x, y) \rightarrow R(y)))$
6. 设 $X = \{a, b, c\}$, $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$, 则关系 R 在 X 上是
A. 传递的 B. 反自反的
C. 自反的 D. 对称的
7. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle \}$, 则下列选项正确的是
A. f 是单射函数 B. f 是满射函数
C. f 是双射函数 D. f 不是 A 到 B 的函数

8. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, 则 X 到 Y 的满射函数的个数为
A. 3 B. 5
C. 6 D. 8
9. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\leq$ 为整除关系, 则关于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的表述正确的是
A. 6 是 A 的极大元 B. A 无最小元
C. A 的最大元是 7 D. A 的极大元有 2 个
10. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 则 A 上的划分个数是
A. 2 B. 3
C. 4 D. 5
11. 在自然数集 N 上, 下列运算中满足交换律的是
A. $x * y = 2x$ B. $x * y = y$
C. $x * y = \max\{x, y\}$ D. $x * y = 2x + y$
12. Klein 四元群 $G = \{e, a, b, c\}$, 则群 G 中所含的阶为 2 的元素个数是
A. 0 B. 1
C. 2 D. 3
13. 8 阶简单无向图 G 有 11 条边, 若顶点的度数是 2 或 3, 则度数为 3 的顶点个数为
A. 2 B. 4
C. 6 D. 7
14. 下列度数序列中, 能构成简单无向图的是
A. $\{1, 2, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 4, 4, 5\}$
C. $\{1, 1, 3, 4, 4\}$ D. $\{2, 2, 2, 2, 3\}$
15. 设 T 是一颗含 6 个结点的树, 则叶子结点数不可能是
A. 1 B. 2
C. 3 D. 5

第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

16. 若两个命题公式 P, Q 等价, 则 $P \leftrightarrow Q$ 是_____式。
17. 任意两个不同小项的合取式为_____式。
18. 谓词公式 $\forall x (F(x, y) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists z H(x, z)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域是_____。
19. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, 则 A 与 B 的对称差是_____。
20. 设 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, X 到 Y 的二元关系 $R = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$, 则 $\text{ran} R^{-1} =$ _____。
21. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\forall x, y \in A$, 定义 $x \otimes y$ 为 x 与 y 的积除以 5 所得的余数, 则元素 4 的逆元是_____。
22. 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, 则 $A \times B =$ _____。

23. 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 对 $\forall a, b \in B, a \wedge (a' \vee b) =$ _____。

24. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是一个格, 公式 $a \vee (a \wedge b) \geq a$ 的对偶公式是 _____。

25. 彼得森图是 _____ - 正则图。

三、简答题: 本大题共 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分。

26. 求命题公式 $(P \vee Q \vee R) \rightarrow (P \wedge (Q \vee R))$ 的主析取范式。

27. 用真值表法判定命题公式 $\neg (P \rightarrow R) \vee (Q \wedge R)$ 的类型。

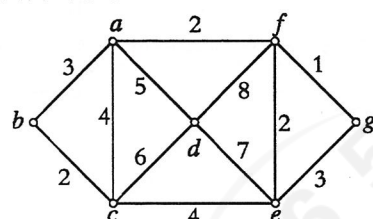
28. 画出集合 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 上整除关系的哈斯图, 并求 COVA 。

29. 已知集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的二元关系 R 的关系矩阵 $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 写出 R 的集合表达式,

并写出自反闭包 $r(R)$ 的关系矩阵和对称闭包 $s(R)$ 的关系矩阵。

30. 设 $A = \{a, b, c, d\}$ 的一个划分为 $S = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, 求由 S 确定的 A 上的等价关系 R 。

31. 依据带权图题 31 图, 使用 *Kruskal* (克鲁斯卡尔) 算法列出详细选边过程, 画出对应的最小生成树, 并求最小生成树的权。



题 31 图

32. 用二叉树表示算术表达式 $(x + y) * z + u \div v$, 并给出该树的先序和后序遍历序列。

四、证明题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

33. 设无向图 $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = kn + 1$, 其中 k 为自然数。证明: $\Delta(G) \geq 2k + 1$ 。

34. 设 A, B, C 是集合, 证明:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|。$$

35. 用 *CP* 规则证明下面有效推理。

前提: $P \vee Q, \neg P \vee \neg R, Q \rightarrow S$

结论: $R \rightarrow S$