

2025 年 4 月高等教育自学考试全国统一考试

大学数学

(课程代码 06227)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 x^2 的关系是
 - A. 等阶无穷小
 - B. 同阶无穷小
 - C. $1 - \cos x$ 是较 x^2 低阶的无穷小
 - D. $1 - \cos x$ 是较 x^2 高阶的无穷小
2. 点 $x = 0$ 是函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 的
 - A. 连续点
 - B. 可去间断点
 - C. 跳跃间断点
 - D. 振荡型间断点
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 0 \\ (a+b)x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$ ($a+b \neq 0$), 则 $f(x)$ 处处连续的充要条件是
 - A. $b = 0$
 - B. $b = 1$
 - C. $b = 2$
 - D. $b = a$
4. 设 $f(x)$ 可导, 且 $y = e^{f(x)}$, 以下正确的是
 - A. $y'' = e^{f(x)}$
 - B. $y'' = e^{f(x)} f''(x)$
 - C. $y'' = e^{f(x)} [f'(x) + f''(x)]$
 - D. $y'' = e^{f(x)} \{[f'(x)]^2 + f''(x)\}$

5. 函数 $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值是

- A. 0
- B. 1
- C. -2
- D. 2

6. 若在区间 (a, b) 内函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x) > 0$, 二阶导数 $f''(x) > 0$, 则函数在此区间内

- A. 单调减少, 为凸函数
- B. 单调增加, 为凸函数
- C. 单调减少, 为凹函数
- D. 单调增加, 为凹函数

7. 下列不等式中成立的是

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$
- B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

8. $\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \frac{1}{1+t} dt =$

- A. $\frac{2x}{1+x^2}$
- B. $\frac{1}{1+x^2}$
- C. $\frac{1}{1+x}$
- D. $\frac{x}{1+x^2}$

9. 微分方程 $y''' - x(y')^2 + 1 = 0$ 的阶是

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

10. 微分方程 $y' + 2xy = 4e^{-x^2}$ 的一个解是

- A. $4e^{-x^2}$
- B. $4e^{x^2}$
- C. $4xe^{-x^2}$
- D. $4xe^{x^2}$

二、判断题：本大题共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分。判断下列各题正误，正确的在

答题卡相应位置涂“A”，错误的涂“B”。

11. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 的极限一定唯一。
12. 有界函数与无穷小的乘积不一定是无穷小。
13. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定有界。
14. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导且 $f(a) = f(b)$ ，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。
15. 函数的驻点不一定是极值点。
16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$ 。
17. 函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 的不定积分。
18. 定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ 在几何上表示由曲线 $f(x) = x^2$ 、直线 $x = 0$ 、 $x = 1$ 及 x 轴所围成图形的面积。
19. 设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续，且为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 。
20. $y = 2e^{\frac{y}{x}}$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x}$ 的通解。

第二部分 非选择题

三、填空题：本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分。

21. 函数 $y = \sqrt{\lg \frac{x-2}{3}}$ 的定义域是_____。

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 3n + 2}{2n^3 + n - 1} =$ _____。

23. 函数 $y = e^{-x}$ 的 n 阶导数是_____。

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} =$ _____。

25. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx =$ _____。

26. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$ _____。

四、计算题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

27. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

28. 求函数 $y = \ln \cos \sqrt{x}$ 的导数。

29. 求函数 $y = x^2 \cos x + \ln x$ 的微分。

30. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ ，其中 $(\alpha > 0)$ 。

31. 计算 $\int \tan x dx$ 。

32. 计算 $\int e^{\sqrt{x}} dx$ 。

33. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ 。

34. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{1+x}$ 的通解。

五、简答题：本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分。

35. 求函数 $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ 的单调增、减区间，极值，及其图像的凹凸区间和拐点。

36. 画图并计算由抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积。