绝密 ★ 考试结束前

2025 年 4 月高等教育自学考试

工程数学(线性代数、概率论与数理统计)试题

课程代码:10993

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明: 在本卷中,A^{T} 表示矩阵 A 的转置矩阵,A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵,

$|A|$ 表示方阵 A 的行列式,$\mathrm{r}(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 2 分,共 16 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 设 2 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=-3$,则 $|-2A|=$

A. -12　　B. -6　　C. 6　　D. 12

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,$PA=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$,则 $P=$

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设 3 阶矩阵 A 的秩为 2,α_1,α_2 为方程组 $Ax=0$ 的两个不同解,k 为任意常数,则 $Ax=0$ 的通解为

A. $k\alpha_1$　　B. $k\alpha_2$　　C. $k(\alpha_1+\alpha_2)$　　D. $k(\alpha_1-\alpha_2)$

4. 下列矩阵中能与对角矩阵相似的为

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 设 A 与 B 为任意两个互不相容的随机事件，则下列结论中正确的是

A. $P(AB)=0$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(A|B)=P(A)$

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{c}{n}k,(k=1,2,\cdots,n)$，则常数 $c=$

A. $\frac{2}{n(n+1)}$　　B. $\frac{1}{n+1}$　　C. $\frac{2}{n+1}$　　D. $\frac{n+1}{2}$

7. 设随机变量 $X\sim B(n,p)(0<p<1)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant 2\right\}=$

A. 0　　B. $\Phi(2)$　　C. $1-\Phi(2)$　　D. 1

8. 设总体 X 服从区间 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，θ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，则参数 θ 的极大似然估计为

A. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$　　B. $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

C. $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$　　D. $\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

9. 行列式 $\begin{vmatrix}0&0&1\\0&2&2\\3&3&3\end{vmatrix}=$________.

10. 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=$________.

11. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，则数 a 应满足的条件为________.

12．若矩阵$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$与矩阵$\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}$相似，则数$a=$________.

13．设$\boldsymbol{A}$为2阶不可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$为2阶单位矩阵，且满足$|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值为________.

14．袋中有3个新球，2个旧球，现每次取一个，不放回地抽取两次，则第二次才取到新球的概率为________.

15．设随机变量X的分布律为$\begin{array}{c|ccc}X&1&2&3\\\hline P&2a&0.1&a\end{array}$，则$P\{X=1\}=$________.

16．设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，

则$E(X^2)=$________.

17．设总体$X\sim N(1,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4为来自X的样本，设$Y=a(X_1-X_4)^2$，若$Y\sim\chi^2(1)$，则常数$a=$________.

18．设某产品的重量$X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，σ^2未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，样本均值为$\overline{X}$，样本标准差为S，欲对产品重量进行假设检验，$H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu\neq\mu_0$，当$H_0$成立时，选用的统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(k)$，则自由度$k=$________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题8分，共56分。

19．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$的秩和一个极大线性无关组,并将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示.

20．求线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=1\\2x_1-x_2+x_3+2x_4=3\\x_1\qquad\quad-x_3+x_4=2\end{cases}$的通解.

21．已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$化二次型为标准形.

22．设随机变量 X 的分布律为 $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array}$.

求：（1）X 的分布函数 $F(x)$；（2）$P\{-2<X<0\}$；（3）$Y=X^2$ 的分布律．

23．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} cx(3x+2y), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求：（1）常数 c 及概率 $P\left\{0\leqslant X\leqslant 1, 0\leqslant Y\leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$；

（2）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（3）X 与 Y 是否相互独立？为什么？

24．设随机变量 X 服从区间 $[-2,4]$ 上的均匀分布，随机变量 $Y=\begin{cases} -1, & X<1, \\ 0, & X=1, \\ 2, & X>1. \end{cases}$

求：（1）$E(X), D(X)$；（2）$E(Y), D(Y)$．

25．设某厂家生产一种材料，其抗压强度 $X\sim N(12,9)$，现厂家换一种新工艺生产该材料，随机抽取36个样品，测得样本均值 $\overline{x}=12.3$．试判断用新工艺后，该材料平均抗压强度较以往有无显著性变化？（$\alpha=0.05$）.（附：$u_{0.025}=1.96$）

四、证明题：本题 8 分。

26．设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量．证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$．