绝密★考试结束前

浙江省2015年4月高等教育自学考试

常微分方程试题

课程代码:10002

请考生按规定用笔将所有试题的答案写在答题纸上。

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

一、填空题(本大题共10小题,每小题3分,共30分)

1. 在微分方程中,未知函数的个数为______时,称为二维微分方程.

2. 方程$(y''')^2+y''\sin x+2xy=0$是______阶微分方程.

3. 微分方程$y'=\sqrt{1-y^2}$过(0,0)的解$y=\sin x$的存在区间为______.

4. 一阶方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$作变换______可化为变量可分离方程.

5. 微分方程$xy'-y=x^4$的通解为______.

6. 函数组e^t,e^{-t},e^{-2t}的朗斯基行列式的值为______.

7. 连续可微函数$\mu(x,y)\neq 0$为$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$积分因子的充要条件是______.

8. 对齐次线性方程组$x'(t)=Ax(t)$(A为常系数矩阵),有$(\exp At)'=$______.

9. 形如$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0$的方程称为______方程,其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$为常数.

10. 数学摆的运动方程$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}\sin\theta$经过变换$x_1=\theta,x_2=\dfrac{d\theta}{dt}$,可化为微分方程组______.

二、计算题(本大题共8小题,每小题7分,共56分)

11. 求方程$ydx+(y^2-x)dy=0$的通解.

12. 求伯努利方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^2\ln x$的通解.

13. 试用毕卡逐次逼近法求方程$\dfrac{dy}{dx}=x+y^2$满足初值条件$y(0)=1$的近似值$\varphi_0(x)$,$\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$.

14. 求方程$y''+2y'+2y=2e^x\cos x$的通解.

15. 求方程 $y' + e^{y'} - x = 0$ 的通解.

16. 试求方程组 $x'(t) = Ax(t)$ 的一个基解矩阵,并计算 $\exp At$,其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

17. 求 $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 7y - 7, \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2$ 的奇点,并判断奇点的类型.

18. 试用李雅普诺夫函数确定方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x^2 y - y^3 \end{cases}$ 零解的稳定性.

三、证明题(本大题共 2 小题,每小题 7 分,共 14 分)

19. 试证:对于二阶齐次线性微分方程 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$,其中 $p(t), q(t)$ 为连续函数.

(1) 若 $p(t) \equiv -tq(t)$,则 $x = t$ 是方程的解;

(2) 若存在常数 m,使得 $m^2 + mp(t) + q(t) \equiv 0$,则方程有解 $x = e^{mt}$.

20. 试证:已知 $\Phi(t), \Psi(t)$ 是齐次线性方程组 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的两个基解矩阵,其中 $A(t)$ 是一个 $n \times n$ 的实值矩阵,则存在一个非奇异的矩阵 C,使得 $\Phi(t) = \Psi(t)C$.