座位号：

姓名：

绝密★启用前

2021年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

复变函数与积分变换

（课程代码　02199）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共12小题，每小题3分，共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 下列区域中，与$\left\{z \,\middle|\, \left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}\right\}$相同的是

A. $\operatorname{Im} z<0$　　B. $\operatorname{Im} z>0$

C. $\operatorname{Re} z<0$　　D. $\operatorname{Re} z>0$

2. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=$

A. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$　　B. $\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$

C. $\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$　　D. $\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$

3. 函数$f(z)=z^4+2z^2+2$的零点个数是

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 方程$|2z+3-4\mathrm{i}|=1$表示的曲线是

A. 圆　　B. 直线

C. 双曲线　　D. 抛物线

5. 函数$f(z)=x^2-y^2$在复平面上

A. 处处不连续　　B. 处处可导

C. 处处连续，仅在$z=0$可导　　D. 处处连续，仅在$z=0$解析

6. 设C为正向圆周$|z|=1$．下列积分中不为零的是

A. $\oint_C \frac{z^2}{z-5}\mathrm{d}z$　　B. $\oint_C z^3 \mathrm{e}^z \mathrm{d}z$

C. $\oint_C \frac{(z+1)^2}{z^5}\mathrm{d}z$　　D. $\oint_C \frac{\sin 2z}{z^2}\mathrm{d}z$

7. 设C为正向圆周$|z|=\frac{1}{2}$，则$\oint_C \frac{\ln(1+z)}{z^2}\mathrm{d}z=$

A. 0　　B. $2\pi\mathrm{i}\ln\frac{3}{2}$　　C. $2\pi\mathrm{i}$　　D. 1

8. 设C为正向圆周$|z|=2$，$f(z)$为解析函数，则$\oint_C \frac{f(z)}{z^2+1}\mathrm{d}z=$

A. $f(\mathrm{i})$　　B. $f(-\mathrm{i})$

C. $\pi[f(\mathrm{i})-f(-\mathrm{i})]$　　D. $2\pi[f(\mathrm{i})-f(-\mathrm{i})]$

9. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\mathrm{i}^n}{3^n}z^n$的收敛半径为

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. 1　　D. $+\infty$

10. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n n!}$的和函数是

A. $\mathrm{e}^{-\frac{z-1}{3}}$　　B. $\mathrm{e}^{\frac{z-1}{3}}$　　C. $\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}$　　D. $\mathrm{e}^{\frac{z}{3}}$

11. 洛朗级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}$的收敛环域为

A. $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$　　B. $2<|z|<3$

C. $2\leqslant|z|\leqslant3$　　D. $|z|>2$

12. 设$f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$，则其傅氏变换$F\ [f(t)]=$

A. $\frac{2}{1+\omega^2}$　　B. $\frac{2\omega}{1+\omega^2}$　　C. $\frac{\omega}{1+\omega^2}$　　D. $\frac{1}{1+\omega^2}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13．复数$\dfrac{1+\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}}$的指数形式为__________.

14．设$\ln(-1)=a+\mathrm{i}b$，则$b=$__________.

15．设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是解析函数，$u=xy$，则$f'(z)=$__________.

16．设C为正向圆周$|z+\mathrm{i}|=1$，则$\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z^4-1}=$__________.

17．设$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2+1}$，则$f(z)$在$z=1$的泰勒级数的收敛半径为__________.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18．设$f(z)=\dfrac{y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x}{x^2+y^2}$，验证$f(z)$当$z\neq0$时解析，并求其导数.

19．计算$\oint_C \dfrac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}\mathrm{d}z$，其中$C$为正向圆周$|z-2|=1$.

20．设$u=\mathrm{e}^{-y}\cos x$，验证u为调和函数，并求解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$.

21．证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$收敛，并求其和.

22．求函数$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+2)^2}$在平面各奇点处的留数.

23．求函数$f(z)=\dfrac{1}{2+2z-z^2}$在$z=1$处的泰勒级数，并求其收敛半径.

四、综合题：本大题共 3 小题，共 19 分。

24．（本题 6 分）

设D是z平面的扇形区域$0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$，求下列保形映射：

（1）$w_1=f(z)$，将D映射成w_1平面的上半平面D_1：$\operatorname{Im}(w_1)>0$；

（2）$w=g(w_1)$，将D_1映射成为w平面的单位圆D_2：$|w|<1$；

（3）$w=F(z)$，将D映射为D_2.

25．（本题 6 分）

求函数$f(t)=\mathrm{e}^{-t}\delta(t)+\mathrm{e}^{-2t}\sin t$的拉氏变换.

26．（本题 7 分）

设$f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2-2z+2\right)^2}$.

（1）求$f(z)$的所有奇点，并说明奇点类型；

（2）求$f(z)$在上半平面奇点处的留数；

（3）利用以上结果求实积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$.