

2019年4月贵州省高等教育自学考试

## 微分几何 试卷

(课程代码: 02014)

(考试时间: 150 分钟)

答卷注意事项:

1. 请考生必须在答题卡上作答。答在试卷和草稿纸上的无效。
2. 第一部分为选择题。必须对应试卷上的题号使用 2B 铅笔将“答题卡”的相应代码涂黑。
3. 第二部分为非选择题。必须按试题顺序注明大、小题号(大题号只写一次), 使用 0.5 毫米黑色字迹签字笔作答。
4. 必须在答题区内作答, 超出答题区无效。

### 第一部分 选择题 (共 20 分)

一、单项选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 若  $\vec{a}(t)$  是可导向量函数,  $\lambda(t)$  是可导实函数, 则  $[\lambda(t)\vec{a}(t)]'$  是等于

- A.  $\lambda(t)\vec{a}'(t)$                       B.  $\lambda'(t)\vec{a}'(t)$   
 C.  $\lambda'(t)\vec{a}(t) + \lambda(t)\vec{a}'(t)$                       D.  $\lambda'(t)\vec{a}(t) - \lambda(t)\vec{a}'(t)$

2. 若向量函数  $\vec{s}(t)$  具有固定方向, 则向量函数  $\vec{s}(t)$  与  $\vec{s}'(t)$  的位置关系是

- A. 垂直                                  B. 平行  
 C. 相等                                  D. 无法确定

3. 若曲线方程  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  中参数  $t$  是曲线的弧长参数, 则曲线的切向量  $\vec{r}'(t)$  是

- A. 零向量                                  B. 单位向量  
 C. 大小为 2 的向量                      D. 大小为 3 的向量

4. 若曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  是正则曲线, 则曲线的曲率是

- A.  $|\vec{r}''(t)|$                                   B.  $\frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$   
 C.  $\frac{|\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)|}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2}$                       D.  $\frac{|\vec{r}'''(t)|}{|\vec{r}''(t)|}$

5. 若  $\kappa(t)$  和  $\tau(t)$  分别是曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  的曲率和挠率, 且  $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)} = c$  (其中  $c$  是常数), 则该

曲线一定是

- A. 一般螺旋线                                  B. 圆柱螺旋线  
 C. 平面曲线                                  D. 直线

6. 若圆柱面的方程为  $\vec{r}(u, v) = \{a \cos u, a \sin u, bv\}$ ,  $u_0, v_0, a, b$  均为常数, 且  $a > 0$ , 则该曲面上  $u$ -曲线的方程是

- A.  $\vec{r}(u, v) = \{a \cos u, a \sin u, bv\}$                       B.  $\vec{r}(u_0, v_0) = \{a \cos u_0, a \sin u_0, bv_0\}$   
 C.  $\vec{r}(u_0, v) = \{a \cos u_0, a \sin u_0, bv\}$                       D.  $\vec{r}(u, v_0) = \{a \cos u, a \sin u, bv_0\}$

7. 下列曲面中为可展曲面的是

- A. 球面    B. 单叶双曲面  
 C. 圆柱面                                      D. 双曲抛物面

8. 若曲面的第一基本形式  $I = Edu^2 + Gdv^2$ , 则它的曲纹坐标网一定是

- A. 正交曲线网                                  B. 渐近线曲线网  
 C. 曲率线曲线网                              D. 共轭曲线网

9. 若曲面  $S$  在点  $P$  的两个主方向上对应的主曲率分别为  $k_1, k_2, k_n$  为沿任意一个切方向的法曲率, 则下列关系式中正确的是

- A.  $k_2 \leq k_1 \leq k_n$                                   B.  $k_n \leq k_2 \leq k_1$   
 C.  $k_2 = k_n = k_1$                                   D.  $\min\{k_1, k_2\} \leq k_n \leq \max\{k_1, k_2\}$

10. 在 3 维欧氏空间中, 按照爱因斯坦和式约定, 下列式子中正确的是

- A.  $G_{ij}H^{ij} = G_{11}H^{11} + G_{22}H^{22}$
- B.  $G_{ij}H^{ij} = G_{11}H^{11} + G_{12}H^{12} + G_{21}H^{21} + G_{22}H^{22}$
- C.  $G_{ij}H^{ij} = G_{12}H^{12} + G_{21}H^{21}$
- D.  $G_{ij}H^{ij} = G_{11}H^{11} - G_{12}H^{12} - G_{21}H^{21} + G_{22}H^{22}$

## 第二部分 非选择题 (共 80 分)

二、填空题: 本大题共 10 空, 每空 2 分, 共 20 分。

11. 如果  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{b}$ , 那么  $\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] =$  \_\_\_\_\_。
12. 如果正则曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在  $s$  点的单位切向量、单位主法向量和单位副法向量分别为  $\vec{\alpha}(s)$ 、 $\vec{\beta}(s)$  和  $\vec{\gamma}(s)$ , 那么标架  $\{\vec{r}(s); \vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)\}$  叫曲线在点  $s$  处的 \_\_\_\_\_ 标架。
13. 如果曲线方程为  $\vec{r}(t) = \{t^2, 2t^3, 3t^4\}$ , 那么在该曲线非正则点处  $t =$  \_\_\_\_\_。
14. 如果正则曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  ( $s$  为弧长参数) 的曲率为  $k(s)$ , 挠率为  $\tau(s)$ , 单位切向量、单位主法向量和单位副法向量分别是  $\vec{\alpha}(s)$ 、 $\vec{\beta}(s)$ 、 $\vec{\gamma}(s)$ , 那么  $\vec{\alpha}'(s) =$  \_\_\_\_\_。
15. 曲率恒为零的线一定是 \_\_\_\_\_。
16. 如果正则曲面  $S$  的方程为  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , 那么向量  $\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$  是曲面切平面的 \_\_\_\_\_ 向量。
17. 如果正则曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的第一基、第二基本形式分别为  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  和  $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ , 那么曲面的曲率曲线网

所满足的微分方程是 \_\_\_\_\_。

18. 圆柱面上某一点处的两个主方向一定是 \_\_\_\_\_。
19. 半径为 2 的球面的高斯曲率  $K =$  \_\_\_\_\_。
20. 正则曲面上测地曲率  $k_g \equiv 0$  的曲线是面上的 \_\_\_\_\_ 线。

三、计算题: 本大题共 6 小题, 每小题 8 分, 共 48 分。

21. 已知曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(t) = \{4 \cos t, 4 \sin t, 3t\}$ , 求此曲线在参数从 0 到  $\pi$  时的弧长。
22. 已知曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, 0\}$ , ( $a > 0$ ), 求此曲线的曲率  $k(t)$ 。
23. 已知曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(t) = \{3t + t^3, 3t^2, 3t - t^3\}$ , 求此曲线在原点处的挠率。
24. 已知曲面  $S$  的方程为  $\vec{r}(u, v) = (b(u-v), a(u+v), 5uv)$ , 其中  $a, b$  是常数, 求该曲面的第一基本形式。
25. 已知曲面  $S$  的方程为  $\vec{r}(u, v) = \{u, u^2 - v^2, v\}$ , 求该曲面的第二基本形式。
26. 已知曲面  $S$  的方程为  $\vec{r}(\theta, \varphi) = \{\theta + \varphi, \theta - \varphi, \theta\varphi\}$ , 求该曲面上渐近曲线的方程。

四、证明题: 本大题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分。

27. 证明曲线  $\vec{r}(\theta) = \{\theta \sin \theta, \theta \cos \theta, \theta e^\theta\}$  在点  $(0, 0, 0)$  处的密切平面方程为  $x + y - z = 0$ 。
28. 已知曲面  $S$  的方程为  $\vec{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, 3v - 4\}$ , 证明该曲面是直纹面, 但不是可展曲面。