座位号：______

姓名：______

机密★启用前

2020年8月高等教育自学考试全国统一考试

实变函数论

（课程代码　11312）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题1分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设m为Lebesgue测度，则$m[0,1]=$

A. 0　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. 设m为Lebesgue测度，$A,B\subset R$，R是实数集，则下列式子一定成立的是

A. $m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)$　　B. $m(A\bigcup B)\leqslant m(A)+m(B)$

C. $m(A\bigcup B)\geqslant m(A)+m(B)$　　D. $m(A\bigcup B)<m(A)+m(B)$

3. 设f是非空集X上的一个可测函数，则下列选项中，成立的是

A. 对$\forall a\in R$，集$X(f>a)$可测　　B. 对$\forall a\in R$，集$X(f\geqslant a)$不一定可测

C. 对$\forall a\in R$，集$X(f>a)$有界　　D. 对$\forall a\in R$，集$X(f\geqslant a)$无界

4. 设$A,A_i(i=1,2,\cdots)$为集合X的子集，$\varnothing$为空集，则下列等式错误的是

A. $A\bigcup A=A$　　B. $A\bigcup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\bigcup A_i)$

C. $A\bigcap\varnothing=A$　　D. $(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c$

5. 设$A=[-1,0)\bigcup\{\frac{1}{n}:n\in N\}\subset R$，则$\overline{A}=$

A. $[-1,0)\bigcup\{\frac{1}{n}:n\in N\}$　　B. $(-1,0)\bigcup\{\frac{1}{n}:n\in N\}$

C. $(-1,0]\bigcup\{\frac{1}{n}:n\in N\}$　　D. $[-1,0]\bigcup\{\frac{1}{n}:n\in N\}$

6. 设$A=[0,1)\bigcup(1,2]$，则$A^\circ=$

A. $[0,2]$　　B. $(0,1)\bigcup(1,2)$

C. $(0,2)$　　D. $[0,1)\bigcup(1,2]$

7. 若$A\subset X,\mu(A)=0$，则$\int_A d\mu=$

A. 0　　B. ∞

C. 1　　D. 2

8. 设$n\geqslant 2,n$为正整数，令$g_i(x)=\begin{cases}0, & 若x<\dfrac{i-1}{n}或x\geqslant\dfrac{i}{n}\\ 2, & 若\dfrac{i-1}{n}\leqslant x<\dfrac{i}{n}\end{cases}$，其中$1\leqslant i\leqslant n$，则

$\int_0^1(g_1+\cdots+g_n)dm=$

A. 0　　B. 1

C. ∞　　D. 2

9. 设$1\leqslant p,q\leqslant\infty$，$p^{-1}+q^{-1}=1,f,g\in L^p(x),h\in L^q(x)$，下列说法错误的是

A. $\|fh\|_1\leq\|f\|_p\|h\|_q$　　B. $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$

C. $\|f\|_p\geqslant 0$　　D. 若$\alpha\in R$，则$\|\alpha f\|_p=\alpha\|f\|_p$

10. 设$BV[a,b]$为$[a,b]$上的有界变差函数全体，$f,g\in BV[a,b]$，下列说法正确的是

A. f 是两减函数之差　　　　B. f 可能有第二类间断点

C. $fg\in BV[a,b]$　　　　D. $f/g\in BV[a,b]$

二、判断题：本大题共 5 小题，每小题 1 分，共 5 分。判断下列各题正误，正确的在答题卡相应位置涂“A”，错误的涂“B”。

11. 任意个开集的交是开集。

12. 设m为$Lebesgue$测度，若A是可数集，则mA=0 。

13. 设 f 与 g 是两个可测函数，则 fg 不一定可测。

14. 若 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，则 f 在$[a,b]$上一定 Lebesgue 可积。

15. 若 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，则 f 是$[a,b]$上的绝对连续函数。

第二部分　非选择题

三、填空题：本大题共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分。

16. 设 $A=(0,2),B=(1,3)$, 则 $A\bigcap B=$_______。

17. 若_______，则称 A 为开集。

18. 设 P 是 Cantor 集，m 是 Lebesgue 测度，则$m(P)=$_______。

19. 设Q是$[0,1]$中的有理数集，m 是 Lebesgue 测度，则 $m([0,1]\setminus Q)=$_______。

20. 设 f 是非空集 X 上的实函数，若_______，则称 f 是 X 上的可测函数。

21. 若_______，称函数序列$\{f_n\}$在 X 上依测度 μ 收敛于 f 。

22. 已知$\int_X fd\mu=1$,若在 X 上 f=$g,a.e.$,则$\int_X gd\mu=$_______。

23. 已知 $A=\varnothing$, f 是 X 上的实函数，则$\int_X fd\mu=$_______。

24. 设 m 是 Lebesgue 测度,若 $A\subset B\subset R,m(A)=3,m(B)=1$, 则 $m(B-A)=$_______。

25. 设 X，Y 是两个非空集，若_______，则称这一对应为映射。

四、简答题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

26. 什么是可数集？请列举一个可数集的例子。

27. 设 f 是 X 上的实函数，请列举至少 3 个 f 是 X 上的可测函数的等价定义。

28. 请写出$\{f_n\}$ 在 X 上几乎处处收敛于 f $(f_n\to f,a.e.)$，几乎一致收敛于 f $(f_n\to f,a.u.)$，依测度 μ 收敛于 f $(f_n\xrightarrow{\mu} f)$ 的关系。

29. 请简述 Lebesgue 积分和 Riemann 积分的关系。

30. 请简述内积的三大性质。

五、证明题：本大题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分。

31. 证明: $(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$.

32. 设 m 是 Lebesgue 测度，$A,B\subset R$，$m(A)=3,A\bigcap B=[1,2],mB=4,$

证明 $m(B\setminus A)=3$及$m(A\bigcup B)=6$.

33. 设 m 是 Lebesgue 测度，设 $D(x)=\begin{cases}1, & 若x\in[0,1]\bigcap Q\\ 0, & 若x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$，其中 Q 为有理数集，

证明 $\int_{[0,1]}D(x)dm=0$.

34. 用有界收敛定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin xdx=0$.

35. 已知对任意 $a\in R$ 有 $\int_0^\infty e^{-ax}\sin xdx=\frac{1}{1+a^2}$ 以及$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$,用 Fubini 定理证明 $\int_0^\infty\frac{1}{x}(e^{-3x}-e^{-2x})\sin xdx=\arctan 3-\arctan 2$.

六、综合题：本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分。

36. 请写出控制收敛定理，并用其证明下面结论：设非负可测函数 f 在 X 上可积，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & 当x\in X[f<n]\ 时\\ n, & 当x\in X[f\geqslant n]\ 时\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)=\int_X f(x)$.