

2020年8月高等教育自学考试全国统一考试

近世代数

(课程代码 10099)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共10小题, 每小题2分, 共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 Z 是整数集, $\sigma(x)=2x, x \in Z$. 则 σ 是 Z 的
 - A. 满射变换
 - B. 单射变换
 - C. 一一变换
 - D. 既不是单射又不是满射的变换
2. 设集 A 有5个元素, 集 B 含有2个元素, 则 A 与 B 的积集 $A \times B$ 的元素个数为
 - A. 2
 - B. 5
 - C. 7
 - D. 10
3. (4213) 是一个4-循环置换, 则 $(4213)^{-1} =$
 - A. (3124)
 - B. (2431)
 - C. (1234)
 - D. (4213)
4. 全体非零有理数的集合对所给运算作成群的是
 - A. 普通数的加法
 - B. 普通数的减法
 - C. 普通数的乘法
 - D. 普通数的除法
5. 在3次对称群 S_3 中, 阶为2的元的个数是
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4

6. 一个6阶循环群的生成元个数是
 - A. 2
 - B. 3
 - C. 4
 - D. 5
7. 整数环是一个
 - A. 域
 - B. 整环
 - C. 除环
 - D. 有零因子可的环
8. R 是实数域, 则多项式环 $R[x]$ 的可逆元是
 - A. 非零多项式
 - B. 正实数
 - C. 负实数
 - D. 非零实数
9. 设 Z 是整数集, 下列数集对于普通加法和乘法不能作成环的是
 - A. $R_1 = \{2n | n \in Z\}$
 - B. $R_2 = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in Z\}$
 - C. $R_3 = \{a + bi | a, b \in Z, i^2 = -1\}$
 - D. $R_4 = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} | a, b \in Z\}$
10. 模7的剩余类环 Z_7 的可逆元的个数是
 - A. 1
 - B. 3
 - C. 6
 - D. 7

二、多项选择题: 本大题共5小题, 每小题2分, 共10分。在每小题列出的备选项中至少有两项是符合题目要求的, 请将其选出, 错选、多选或少选均无分。

11. 设 R 为实数集, 以下关系中是 R 的元间的等价关系的有
 - A. 大于
 - B. 等于
 - C. 小于
 - D. 绝对值相等
 - E. 平方相等
12. 一个15阶群的子群的阶可能是
 - A. 1
 - B. 3
 - C. 4
 - D. 5
 - E. 10
13. 模16的剩余类加群 Z_{16} 的4阶元的有
 - A. $[2]$
 - B. $[4]$
 - C. $[8]$
 - D. $[10]$
 - E. $[12]$

14. 整数环 Z 的最大理想有
- A. (2) B. (4)
C. (5) D. (11)
E. (2018)
15. 下列元素中, 模 22 的剩余类环 Z_{22} 的零因子有
- A. [2] B. [4]
C. [5] D. [11]
E. [13]

三、判断题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。判断下列各题正误, 正确的在答题卡相应位置涂“**A**”, 错误的涂“**B**”。

16. 数 0 的集合 $S = \{0\}$ 关于数的普通加法和普通乘法作成环。
17. 一个有限群中任一元素的阶都整除该群的阶。
18. 数 2018 可以是某一个环的特征。
19. 一个除环的理想只有零理想和单位理想。
20. 每一个唯一分解环都是主理想环。

第二部分 非选择题

四、填空题: 本大题共 9 小题, 每小题 2 分, 共 18 分。

21. 设变换的合成是从左到右的, 在 5 次对称群 S_5 中, 则 $(1234)^2(54)(45)^{-1}(1234)^2 =$ _____。
22. 群 G 的一个 3 阶子群在 G 中的指数为 4, 则群 G 的阶是 _____。
23. 设 $n \in Z, n > 1$, 模 n 的剩余类加群 Z_n 与 n 次单位根乘法群是 _____ 的循环群。
24. 设 G 是一个群, 则对于 $\forall a, b, c \in G$, 则 $(abc)^{-1} =$ _____。
25. 整数环 Z 的由 4, 6 生成的理想 $(4, 6) =$ _____。
26. 在特征为 3 的交换环中, $(a+b)^6 =$ _____。
27. 在实数域 R 中, 阶为 2 的元有 _____。
28. 设 $R = \{0, 1, x, y\}$ 是除环, 则 $x^3 = y^3 =$ _____。
29. 设 R 是模 7 的剩余类环 Z_7 , 则在 $R[x]$ 中 $(x+[3])(x+[4]) =$ _____。

五、名词解释题: 本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分。

30. 循环群
31. 不变子群
32. 无零因子环的特征
33. 主理想环

六、解答题: 本大题共 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分。

34. (1) (5 分) 设变换的合成是从左到右的. 将置换

$$\sigma = (345)(234)(123)(671)(567)(456)$$

写成不相连的循环置换的乘积.

(2) (5 分) 求模 10 的剩余类环 Z_{10} 的子环.

35. 设 $M_n(R)$ 表示数域 R 上的 n 阶方阵的集合, $J \in M_n(R)$ 为一个固定可逆矩阵, $G = \{A \mid A \in M_n(R), AJA^T = J\}$, A^T 是 A 的转置矩阵. 证明 G 关于矩阵的乘法作成群.
36. 设 Q 是有理数域, $F = \{a + bi \mid a, b \in Q, i^2 = -1\}$. 证明 F 关于普通数的加法和乘法作成域.