

2020年8月高等教育自学考试全国统一考试

复变函数论

(课程代码 02011)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共10小题, 每小题2分, 共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 若 $f(Z) = \bar{Z}Z^3$, 则 $f(Z)$

- | | |
|--------------|-----------------|
| A. 在复平面上处处可导 | B. 仅在 $Z=0$ 处可导 |
| C. 在复平面上处处解析 | D. 仅在 $Z=0$ 处解析 |

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} Z^n$ 的收敛半径为

- | | |
|------|------------------|
| A. 0 | B. $\frac{1}{e}$ |
| C. 1 | D. $\frac{1}{2}$ |

3. $z=0$ 是函数 $f(z) = \frac{1-e^z}{z^2 \sin z}$ 的

- | | |
|---------|----------|
| A. 二级极点 | B. 可去奇点 |
| C. 本性奇点 | D. 非孤立奇点 |

4. 函数 $\omega = f(x) = u + iv$ 解析, 则下列命题中错误的是

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| A. u, v 均为调和函数 | B. v 是 u 的共轭调和函数 |
| C. u 是 v 的共轭调和函数 | D. $-u$ 是 v 的共轭调和函数 |

5. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则与 $f(z)=\text{常数}$ 不等价的命题是

- | | |
|-------------------------|--|
| A. $f'(z) = 0$ | B. $\text{Re } z = \text{Im } z = \text{常数}$ |
| C. $\overline{f(z)}$ 解析 | D. $ f(z) = \text{常数}$ |

6. 映射 $w = z^2$ 在点 $z = i$ 处的伸缩率为

- | | |
|--------|---------|
| A. 1 | B. 2 |
| C. i | D. $-i$ |

7. 复数 $e^{\frac{5}{2}\pi i}$ 等于

- | | |
|---------|--------|
| A. $-i$ | B. i |
| C. 0 | D. 1 |

8. 方程 $\text{Im } z^2 - 1 = 0$ 表示的曲线是

- | | |
|-------|--------|
| A. 圆周 | B. 双曲线 |
| C. 椭圆 | D. 抛物线 |

9. 设 $C: |z-1| = \frac{1}{2}$, 则 $\oint_C \frac{\cos z}{z} dz =$

- | | |
|------|-------------------|
| A. 0 | B. $\pi \cdot i$ |
| C. 1 | D. $2\pi \cdot i$ |

10. 分式线性函数 $w = \frac{z-i}{z+i}$ 将下半平面 $\text{Im } z < 0$ 共形映射为

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| A. $\text{Im } w > 0$ | B. $\text{Im } w < 0$ |
| C. $ w > 1$ | D. $ w < 1$ |

二、判断题：本大题共 6 小题，每小题 1 分，共 6 分。判断下列各题正误，正确的在答题卡相应位置涂“A”，错误的涂“B”。

11. 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z) + g(z)$ 的一个奇点。
12. 若 $f(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内的各阶导数也解析。
13. 如果 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 且 $|\sin z| \leq 1$ ，那么 $|\cos z| \leq 1$ 。
14. 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可导，那么 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 也可导。
15. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则它在该点的某个邻域内可以展开为幂级数。
16. 如果 $f(z)$ 在 z_0 点连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。

第二部分 非选择题

三、填空题：本大题共 9 小题，每小题 2 分，共 18 分。

17. 设 $z = i^8 - 4i^{21} + i$ ，则 $\arg z =$ _____
18. $\operatorname{Ln}(ie) =$ _____
19. 若 $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$ ，则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] =$ _____
20. $\int_{-2}^{-2+i} (z+2)^2 dz =$ _____
21. 函数 $f(z) = z^2(e^{2z} - 1)$ 在零点 $z = 0$ 的阶为 _____ 阶。
22. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z-3)^n$ 的收敛圆为 _____
23. 已知 $f(z) = z^3 + 2iz$ ，则 $f'(z) =$ _____
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ ，(p 为正整数) 的收敛半径为 _____

25. 映射 $W = z^2 + 2z$ 在点 $z = -1 + 2i$ 处的旋转角为 _____。

四、计算题：本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分。

26. 讨论函数 $f(z) = |z|^2 z$ 的可微性及解析性。
27. 设一个解析函数的虚部 $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, ($x > 0$)，求此解析函数 $f(z) = u + iv$ 。
28. 计算复积分 $I = \int_C \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^3} dz$ ，其中 C 为： $|z| = 2$ ，取正向。
29. 试将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ 在 $0 < |z| < 1$ 展成洛朗级数。
30. 确定函数 $f(z) = \frac{1}{z^3(e^{z^3} - 1)}$ 的孤立奇点的类型。
31. 求将上半 z 平面共形映射为圆 $|W| < 1$ ，且满足 $W(i) = 0, W'(i) > 0$ 的分式线性变换 $W(z)$ 。

五、证明题：本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分。

32. 试证：如果 $|a| > \frac{e^R}{R^n}$ ，则方程 $e^z - az^n = 0$ (n 为正整数) 在圆 $|z| < R$ 内恰有 n 个根。
33. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析， c 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线 (c 的内部含于 D)，证明：对在 D 内但不在 c 上的任意一点 z_0 ，等式 $\oint_c \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$ 成立。