

15. $z = a$ 是函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的极点, 则必是函数 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的极点.

16. 如果函数 $w = f(z)$ 在区域 D 单叶解析, 且 $|f'(z)| < 1$, 则 f 将区域 D 压缩到 w 平面.

第二部分 非选择题

三、填空题: 本大题共 9 小题, 每小题 2 分, 共 18 分.

17. 复数 $z = 2 + 3i$, 则 $|z| =$ _____.

18. 复数 $z = 1 - \sqrt{2}i$, 则 $\bar{z} =$ _____.

19. 函数值 $\cos(2i) =$ _____.

20. 函数 $f(z) = \sin z$ 的周期为 _____.

21. 积分值 $\int_0^{2i} z dz =$ _____.

22. 积分值 $\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz =$ _____.

23. 幂级数 $\sum \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 $R =$ _____.

24. $z = 1$ 为函数 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ 的极点的阶数为 _____.

25. 映射 $w = f(z) = z^2$ 在点 $z = 1 - i$ 的收缩率为 _____.

四、计算题: 本大题共 6 小题, 每小题 7 分, 共 42 分.

26. 讨论函数 $f(z) = 2x + y^2i$ 的可微性与解析性, 这里 x, y 为实数.

27. 已知函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析, 且 $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy, f(0) = i$.

求 $f(z)$.

28. 求函数 $f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{1+z}$ 在 $1 < |z| < 3$ 内的洛朗展式.

29. 已知 $f'(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z-2)^2(z+1)}$, 求曲线积分 $\oint_{|z|=3} f(z) dz$.

30. 求函数 $f(z) = \frac{z}{\sin 2z} + e^z$ 的全部奇点及其类型.

31. 求一分式线性变换 $w = L(z)$, 使得将上半面 $\text{Im} z > 0$ 映射成上半平面, 且

$$L(1+i) = 3+2i, L(1) = 0.$$

五、证明题: 本大题共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分.

32. 已知 $f(z)$ 在复平面解析, 又 $f(0) = i$, 且 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 2$. 证明 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内至少有一个零点.

33. 证明, 方程 $e^z - 3z^n = 0$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内恰有 n 个根.