座位号：________

姓名：________

绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21}-2a_{11} & a_{22}-2a_{12} & a_{23}-2a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{vmatrix}=$

A. $-2m$　　B. $-m$　　C. m　　D. $2m$

2. 设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,3,4)^{\mathrm{T}}$，矩阵$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则$r(A)=$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设A为3阶矩阵，则$|A|=0$的充分必要条件是

A. A的列向量组线性无关　　B. A的行向量组线性相关

C. A的秩为2　　D. A中有两行元素对应成比例

4. 设线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多个解，则数$a=$

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

5. 设2阶矩阵A满足$|2E+3A|=0$，$|E-A|=0$，则$|A+E|=$

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，其代数余子式为 $A_{ij}\,(i,j=1,2,3)$，

   则 $A_{11}-A_{21}+2A_{31}=$________.

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，则行列式 $|AB|=$________.

8. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-A-E=O$，则 $A^{-1}=$________.（用矩阵 A 表示.）

9. 设 A 为 2 阶矩阵，若存在矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，

   则 $A=$________.

10. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,2,4)^T,\alpha_3=(-1,3,t)^T$ 线性无关，则数 t 的取值应满足________.

11. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & t \end{pmatrix}$，若 3 阶非零矩阵 B 满足 $AB=O$，则数 $t=$________.

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(A,\beta)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

   若该方程组有无穷多解且其导出组的基础解系有 1 个向量，则数 a,c 的取值应分别满足________.

13. 设 3 阶可逆矩阵 A 有特征值为 2，则矩阵 $(A^2)^{-1}$ 必有一个特征值为________.

14. 已知 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是其一个特征向量，则 α 对应的特征值为________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-3x_1x_2$ 经可逆线性变换 $\begin{cases} x_1=y_1+3y_2 \\ x_2=\quad\ \ y_2 \end{cases}$ 化为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 2 维列向量，令 $A=(\alpha_1,\alpha_3), B=(2\alpha_2,3\alpha_3)$，且已知 $|A|=\frac{1}{4},|B|=-3$，

    求行列式 $|A-B|$ 的值.

17. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，求

    （1）矩阵 X，使得 $A+2X=B$；（2）AX^T.

18. 设 3 阶矩阵 A 和 B 满足关系式 $A+B=AB$，其中 $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 A.

19. 求向量组 $\alpha_1=(1,\ 4,\ 1,\ 0)^T,\alpha_2=(2,1,-1,-3)^T,\alpha_3=(1,0,-3,-1)^T,\alpha_4=(0,2,-6,3)^T$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 确定数 k 的值，使线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+kx_2-2x_3=0 \\ kx_1+2x_2+x_3=k \end{cases}$ 有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ -2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$，

    （1）求数 a 与 b 的值；

    （2）A 是否可以相似对角化？若可以，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

22. 求正交变换 $x=Py$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形 $f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设 A 为 2 阶矩阵，已知 $|A|<0$，证明 A 一定可相似对角化.