姓名：________

准考证号：________

绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

复变函数与积分变换

（课程代码　02199）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共12小题，每小题3分，共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 复数$z=-1+i$的模和幅角主值分别为

A. $\sqrt{2}$和$\frac{\pi}{4}$　　B. $\sqrt{2}$和$\frac{3\pi}{4}$　　C. 2和$\frac{\pi}{4}$　　D. 2和$\frac{3\pi}{4}$

2. $\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=$

A. $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$　　B. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$　　C. $-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}$　　D. $\frac{2+\sqrt{3}i}{2}$

3. $e^{-i\frac{\pi}{2}}=$

A. $-i$　　B. 1　　C. i　　D. -1

4. 设$f(z)=\frac{z}{z^2+3}$，则$f'(0)=$

A. $-\frac{1}{3}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 1

5. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是一个解析函数. 若$u(x,y)=y$，则$f'(z)=$

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. -1

6. 设C是$|z-1|=1$从$z=0$到$z=1+i$的圆弧，则积分$\int_C \cos z\,dz=$

A. $\sin(1+i)$　　B. $\cos(1+i)$　　C. $-\sin(1+i)$　　D. $-\cos(1+i)$

7. 设C为正向圆周$|z-2|=1$，则积分$\oint_C \frac{dz}{z^2(z-2)}=$

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{\pi i}{2}$　　D. $\frac{\pi i}{2}$

8. 设C为正向圆周$|z|=1$，则积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin z dz}{z^6}=$

A. $-\frac{1}{5!}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{6!}$　　D. $\frac{1}{5!}$

9. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$的收敛半径为

A. $\frac{1}{3}$　　B. 1　　C. 3　　D. $+\infty$

10. 洛朗级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{(z-2)^{n+1}}$的收敛圆环域为

A. $0<|z-2|<1$　　B. $1<|z-2|<2$

C. $0<|z-2|<+\infty$　　D. $1<|z-2|<+\infty$

11. $z=1$是函数$f(z)=\sin\frac{1}{(z-1)^5}-1$的

A. 可去奇点　　B. 本性奇点　　C. 5阶极点　　D. 5阶零点

12. 函数$f(t)=te^t$的拉氏变换$L[te^t]=$

A. $\frac{1}{p-1}$　　B. $\frac{1}{p+1}$　　C. $\frac{1}{(p-1)^2}$　　D. $\frac{1}{(p+1)^2}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13. $(1+\mathrm{i})^6=$__________.

14. 设 $f(z)=\ln z$，则 $\operatorname{Im} f(z)=$__________.

15. $f(y)=\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}y}$ 的最小正周期为__________.

16. 设 C 为正向圆周 $|z-\mathrm{i}|=1$，则积分 $\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z=$__________.

17. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n+1}$ 的和函数为__________.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是解析函数．已知 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y+x$，$f(0)=\mathrm{i}$，求 $f(z)$．

19. 求积分 $I=\oint_C \frac{z}{z^2+1}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$．

20. 求积分 $I=\oint_C \frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^n}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z-1|=1$，n 为整数.

21. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

22. 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$ 在点 $z=1$ 处展开成泰勒级数，并求其收敛半径.

23. 求函数 $f(z)=\frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})^2}$ 在复平面内各奇点处的留数.

四、综合题：本大题共 3 小题，共 19 分。

24.（本题 6 分）

利用留数定理求积分 $I=\oint_C \frac{z-1}{z^2+1}\mathrm{d}z$，其中 C 是正向圆周 $|z|=2$．

25.（本题 6 分）

记函数 $f(t)$ 的傅氏变换为 $F(\omega)=F[f(t)]$，求 $F[5f(t-3)+2]$．

26.（本题 7 分）

（1）求保形映射 $w_1=w_1(z)$，将 z 平面的第一象限映射为 w_1 平面的上半平面，并将点 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 和 $z=0$ 分别映射成点 $w_1=\mathrm{i}$ 和 $w_1=0$；

（2）求保形映射 $w=w(w_1)$，将 w_1 平面上的上半平面映射为 w 平面上的单位圆，并将点 $w_1=\mathrm{i}$ 和 $w_1=0$ 分别映射成点 $w=0$ 和 $w=1$；

（3）求保形映射 $w=f(z)$，将 z 平面上的第一象限映射为 w 平面上的单位圆，并将点 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ 和 $z=0$ 分别映射成点 $w=0$ 和 $w=1$.