绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数(经管类)

（课程代码　04184）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^{*}表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设$f(x)=\begin{vmatrix}2&3&2\\-1&0&x\\1&5&2\end{vmatrix}=a_1x+a_0$，则$a_0=$

A. −7　　B. −4　　C. 4　　D. 7

2. 设A为3阶矩阵，将A的第2行与第3行互换得到矩阵B，再将B的第1列的(−2)倍加到第3列得到单位矩阵E，则$A=$

A. $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

3. 若向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\6\\-k\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2k\end{pmatrix}$的秩为2，则数$k=$

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 设线性方程组$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$有无穷多个解，则数$a=$

A. −2　　B. −1

C. 1　　D. 2

5. 设2阶矩阵A满足$|2E+3A|=0$，$|E-A|=0$，则$|A+E|=$

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式$\begin{vmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{vmatrix}=$____________.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若行列式$|\boldsymbol{B}|=-2$，则行列式$|3\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3-2\boldsymbol{\beta}_1|=$ ____________.

8. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.（用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示.）

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，若存在矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，

   则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

10. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,t)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，则数 t 的取值应满足____________.

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\3&2&t\end{pmatrix}$，若 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则数 $t=$____________.

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&1\\0&3&-1&2&1\\0&0&a+1&0&a+1\\0&0&0&c-2&0\end{array}\right)$$

   若该方程组有无穷多解且其导出组的基础解系有 2 个向量，则数 a,c 的取值应分别满足____________.

13. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值为 3，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}$ 必有一个特征值为____________.

14. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&-1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$是其一个特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值为____________.

15. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2t\,x_1x_2+2x_1x_3$ 正定，则数 t 的取值范围为____________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1-b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2-b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}$的值.

17. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&5&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&5&-2\\5&1&9\end{pmatrix}$，求

   （1）矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$；（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$.

18. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

19. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,0,4)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 确定数 k 的值，使线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-1\\2x_1+kx_2-2x_3=0\\kx_1+2x_2+x_3=k\end{cases}$有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $6,3,3$，已知特征值 6 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

22. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形 $f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.