

机密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一考试

## 近世代数

(课程代码 10099)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

### 第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共10小题, 每小题2分, 共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设  $A$  是正整数集,  $\sigma(x)=x+1, x \in A$ . 则  $\sigma$  是  $A$  的  
A. 满射变换  
B. 单射变换  
C. 一一变换  
D. 既不是单射又不是满射的变换
2. 设集  $A$  有4个元素, 集  $B$  含有3个元素, 则  $A$  与  $B$  的积集  $A \times B$  的元素个数为  
A. 3  
B. 4  
C. 7  
D. 12
3.  $(45213)$  是一个5-循环置换, 则  $(45213)^{-1} =$   
A.  $(12345)$   
B.  $(54213)$   
C.  $(31254)$   
D.  $(45213)$
4. 全体整数的集合对所给运算作成群的是  
A. 普通数的加法  
B. 普通数的减法  
C. 普通数的乘法  
D. 普通数的除法
5. 在4次对称群  $S_4$  中, 阶为2的元的个数是  
A. 2  
B. 4  
C. 6  
D. 8

6. 一个6阶循环群的生成元个数是  
A. 2  
B. 3  
C. 4  
D. 5
7. 整数环  $Z$  中不可逆元的个数是  
A. 1  
B. 2  
C. 有限多个  
D. 无限多个
8.  $Z$  是整数环, 则多项式环  $Z[x]$  的可逆元是  
A. 非零多项式  
B.  $-1, 1$   
C. 素数  
D. 非零整数
9. 设  $Z$  是整数集, 下列数集对于普通加法和乘法不能作成环的是  
A.  $R_1 = \{4n | n \in Z\}$   
B.  $R_2 = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in Z\}$   
C.  $R_3 = \{a + bi | a, b \in Z, i^2 = -1\}$   
D.  $R_4 = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{5} | a, b \in Z\}$
10. 模6的剩余类环  $Z_6$  的可逆元的个数是  
A. 2  
B. 3  
C. 4  
D. 5

二、多项选择题: 本大题共5小题, 每小题2分, 共10分。在每小题列出的备选项中至少有两项是符合题目要求的, 请将其选出, 错选、多选或少选均无分。

11. 设  $R$  为实数集, 以下关系中是  $R$  的元间的等价关系的有  
A. 大于  
B. 等于  
C. 小于  
D. 立方相等  
E. 立方根相等
12. 一个20阶群的子群的阶可能包括  
A. 3  
B. 4  
C. 5  
D. 10  
E. 15
13. 模12的剩余类加群  $Z_{12}$  的4阶元的有  
A. 2  
B. 3  
C. 6  
D. 9  
E. 10

14. 整数环  $Z$  的最大理想的有

- A. (2)
- B. (4)
- C. (5)
- D. (7)
- E. (2018)

15. 下列元素中, 模 22 的剩余类环  $Z_{22}$  的零因子有

- A. [3]
- B. [4]
- C. [8]
- D. [11]
- E. [13]

三、判断题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。判断下列各题正误, 正确的在答题卡相应位置涂 “A”, 错误的涂 “B”。

- 16. 数的集合  $S = \{1\}$  关于数的普通乘法作成是一个群.
- 17. 三次对称群  $S_3$  关于它的任一个 3 阶不变子群所作成的商群的阶是 2.
- 18. 一个环的中心一定是它的理想.
- 19. 任一个环都至少有两个理想.
- 20. 每一个欧氏环都是主理想环.

## 第二部分 非选择题

四、填空题: 本大题共 9 小题, 每小题 2 分, 共 18 分。

- 21. 设变换的合成是从左到右的. 在 5 次对称群  $S_5$  中, 则  $(1234)^2(52)(25)^{-1}(1234)^3 =$  \_\_\_\_\_.
- 22. 群  $G$  的一个 4 阶子群在  $G$  中的指数为 2, 则群  $G$  的阶是 \_\_\_\_\_.
- 23. 设  $n \in Z, n > 1$ ,  $n$  次单位根乘法群与 \_\_\_\_\_ 是同构的循环群.
- 24. 设  $G$  是一个群, 则对于  $\forall a, b, c \in G$ , 则  $c^{-1}(ab^{-1}c^{-1})^{-1}a =$  \_\_\_\_\_.
- 25. 整数环  $Z$  的由 9, 12 生成的理想  $(9, 12) =$  \_\_\_\_\_.
- 26. 在特征为 3 的交换环中,  $(a+b)^4 =$  \_\_\_\_\_.
- 27. 在模 6 的剩余类环  $Z_6$  中, 阶为 2 的元有 \_\_\_\_\_.
- 28. 设  $R = \{0, 1, x, y, z, u, v\}$  是除环, 则  $x^5 = \dots = v^5 =$  \_\_\_\_\_.
- 29. 设  $R$  是模 7 的剩余类环  $Z_7$ , 则在  $R[x]$  中  $(x - [3])(x - [5]) =$  \_\_\_\_\_.

五、名词解释题: 本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分。

- 30. 群  $G$  的子群  $H$  在群  $G$  中的指数
- 31. 群的同态满射的核
- 32. 除环
- 33. 唯一分解环

六、解答题: 本大题共 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分。

34. (1) (5 分) 设变换的合成是从左到右的. 将置换

$$\sigma = (456)(567)(671)(123)(234)(345)$$

写成不相连的循环置换的乘积.

(2) (5 分) 求模 8 的剩余类环  $Z_8$  的子环.

- 35. 设  $M_n(F)$  表示数域  $F$  上的  $n$  阶方阵的集合,  $G = \{A \mid A \in M_n(F), |A| = 1\}$ . 证明  $G$  关于矩阵的乘法作成是一个群.
- 36. 设  $Z$  是整数集,  $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$ . 证明  $R$  关于普通数的加法和乘法作成是一个整环.