机密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一考试

实变函数论

（课程代码　11312）

注意事项：

1．本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。

2．应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。

3．涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题1分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．设m为Lebesgue测度，则$m\varnothing=$

A．0　　B．1

C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

2．设m为Lebesgue测度，$A,B\subset R$，R是实数集。则下列式子可能不成立的是

A．若$A\subset B$，则$mA\leqslant mB$　　B．$m(A)+m(B)=m(A\cup B)$

C．$m[0,1]=1$　　D．$m(A)+m(B)\leqslant m(A\cup B)$

3．设$f,g,f_n(n=1,2,\cdots)$是非空集X上的一个可测函数，则下列选项中，错误的是

A．$f+g$在其有定义的集合上可测　　B．$f-g$在其有定义的集合上可测

C．fg在X上不一定可测　　D．$\sup\limits_n f_n$在X上可测

4．设$\{A_n\}$是一集列，下列等式成立的是

A．$\underline{\lim\limits_n} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

B．$\overline{\lim\limits_n} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

C．若$\{A_n\}$为升列，则$\underline{\lim\limits_n} A_n=\lim\limits_n\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_k$

D．$\overline{\lim\limits_n} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

5．设$A=[1,2)\cup(2,3]$，则$\overline{A}=$

A．$[1,3]$　　B．$(0,1)\cup(1,2)$

C．$(1,3)$　　D．$[1,3)$

6．下列说法错误的是

A．若$A=A^{\circ}$，则A为开集　　B．若$A\subset\overline{A}$，则A为闭集

C．若A为开集，则A^c为闭集　　D．$\varnothing$在R^n中同时为开集和闭集

7．令$g_n(x)=\begin{cases}0, & 若x\notin[n,n+1)\\ 1, & 若x\in[n,n+1)\end{cases}$，其中$n$为整数，则$\int_{-\infty}^{\infty}g_n dm=$

A．0　　B．1

C．∞　　D．$\frac{1}{2}$

8．若f在R上关于测度μ可积，下列说法错误的是

A．$|f|$在R上关于测度μ可积　　B．若$\int|f|d\mu=0$，则$f=0,a.e.$

C．$\int|f|d\mu\leq\left|\int fd\mu\right|$　　D．$\int fd\mu=\int f^{+}d\mu-\int f^{-}d\mu$

9．给定$f,g\in L^2(X)$，则内积(f,g)不一定满足

A．$(f,g)=\int_X fgd\mu$　　B．$(f,g)=(g,f)$

C．$(f,f)=\|f\|_2^2$　　D．$(f,f)>0$

10. 设$AC[a,b]$为$[a,b]$上的绝对连续函数全体，$f\in AC[a,b]$，f'在$[a,b]$上存在，下列说法错误的是

A. f是连续的有界变差函数　　B. $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$

C. $f'\in AC[a,b]$　　D. $|f|\in AC[a,b]$

二、判断题：本大题共 5 小题，每小题 1 分，共 5 分。判断下列各题正误，正确的在答题卡相应位置涂“A”，错误的涂“B”。

11. 设G为Cantor集，则G为完备疏集。

12. 设m为Lebesgue测度,$a,b\in R,a<b$,则$m[a,b]>m(a,b)$。

13. 设f与g是两个可测函数，则$f\wedge g$不一定可测。

14. 若f在$[a,b]$上 Lebesgue 可积，则f在上 Riemann 可积。

15. 若f是$[a,b]$上的绝对连续函数，则f是$[a,b]$上的有界变差函数。

第二部分　非选择题

三、填空题：本大题共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分。

16. 设$A=(0,3),B=(1,4)$,则$A\cup B=$________。

17. 若________，则称A为闭集。

18. 设P是 Cantor 集，m是 Lebesgue 测度，则$m([0,1]\setminus P)=$________。

19. 设Q是$[0,1]$中的有理数集，m是 Lebesgue 测度，则$mQ=$________。

20. 设μ是集合X上的一个测度，$A\subset X$，如果________，则称μ为σ-有限测度。

21. 若________，称函数序列$\{f_n\}$在X上几乎一致收敛于f。

22. 设f,g在X上 Lebesgue 可积，若$\int_X|f|=0$，则在X上几乎处处有$f=$________。

23. 已知A为有理数集,f是A上的实函数，则$\int_A fd\mu=$________。

24. 任给可测集$A\subset X$，设$\chi_A(x)=\begin{cases}1\text{ ,当}x\in A\text{时}\\0\text{，当}x\notin A\text{时}\end{cases}$,则$\int_X\chi_A(x)d\mu=$________。

25. 设$f:X\to Y$为一映射，若________，则称f为单射。

四、简答题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

26. 什么是双射？请列举一个双射的例子。

27. 设m是 Lebesgue 测度，请列举 3 个满足$mE=0$的集合E。

28. 简述 Luzin 定理。

29. 简述控制收敛定理。

30. 简述范数公理的三大性质。

五、证明题：本大题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分。

31. 证明：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

32. 设m是 Lebesgue 测度，$A,B,C\subset R$，$m(A)=3,m(B)=4,(A\cup B)\cap C=[1,3]$，$mC=5$，证明$m(A\cup B\cup C)\leqslant 10$.

33. 设m是 Lebesgue 测度，$X=\bigcup_{i=1}^n A_i$，$m(X)=1$，其中$n\geqslant 2$，$\{A_i\}_{1\le i\le n}$为元素两两不交的集族,对任意$A\subset X$,定义$\chi_A(x)=\begin{cases}1,\text{ 若}x\in A\\0,\text{ 若}x\notin A\end{cases}$,证明$\sum_{i=1}^n\int_X\chi_{A_i}(x)dm=1$.

34. 用控制收敛定理证明$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^8)^n dx=0$.

35. 用 Fubini 定理证明：若$f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上可积，则

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx.$$

六、综合题：本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分。

36. 请写出$\overline{\lim_{n\to+\infty}}A_n$和$\underline{\lim_{n\to+\infty}}A_n$的表达式，设$A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n}),A_{2n}=(0,n),n=1,2,\cdots$，求$\overline{\lim_{n\to+\infty}}A_n$和$\underline{\lim_{n\to+\infty}}A_n$.