

机密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一考试

复变函数论

(课程代码 02011)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共10小题, 每小题2分, 共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$ 的主辐角 $\arg z =$
 - A. π
 - B. $\frac{\pi}{2}$
 - C. $-\frac{\pi}{2}$
 - D. $-\pi$
2. 已知 $w = u + vi$, 则函数 $w = z^2$ 将 z 平面上的曲线 $xy = 1$ 映射成 w 平面上的
 - A. 直线 $v = 2$
 - B. 直线 $u = 2$
 - C. 直线 $v = 1$
 - D. 直线 $u = 1$
3. 已知 $f(z) = \sin z$, 则 $f(i) =$
 - A. $\frac{e + e^{-1}}{2}$
 - B. $\frac{e + e^{-1}}{2}i$
 - C. $\frac{e^{-1} - e}{2}i$
 - D. $\frac{e - e^{-1}}{2}i$
4. 函数值 $\operatorname{Ln} e$
 - A. -1
 - B. 1
 - C. $1 + 2k\pi i, (k \in Z)$
 - D. $1 + k\pi i, (k \in Z)$

5. 积分值 $\int_0^{1+i} (z-1)dz =$

- | | |
|-------------------|------------------|
| A. -1 | B. 1 |
| C. $-\frac{1}{2}$ | D. $\frac{1}{2}$ |

6. $\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz =$

- | | |
|-------------|-------------|
| A. 1 | B. 4 |
| C. $2\pi i$ | D. $4\pi i$ |

7. 以下级数收敛的是

- | | |
|--|--|
| A. $\sum \left(\frac{1+i^n}{n} \right)$ | B. $\sum \left(\frac{1+i^n}{n^2} \right)$ |
| C. $\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{i^n}{n^2} \right)$ | D. $\sum \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i^n}{n} \right)$ |

8. 已知幂级数 $f(z) = \sum c_n z^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 则以下结论正确的是

- A. 函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|=1$ 上处处解析
- B. 函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|=1$ 上处处不解析
- C. 函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|=1$ 上至少有一个解析点
- D. 函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|=1$ 上至少有一个奇点

9. $z=0$ 是函数 $f(z) = z(1 - \cos z^2)$ 的零点, 该零点的阶数为

- | | |
|--------|--------|
| A. 5 | B. 3 |
| C. 2 | D. 1 |

10. 以下函数中, $z = \infty$ 为其单极点的是

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| A. $f(z) = 1$ | B. $f(z) = z + 1$ |
| C. $f(z) = \frac{1}{z}$ | D. $f(z) = z^2 + z + 1$ |

二、判断题：本大题共 6 小题，每小题 1 分，共 6 分。判断下列各题正误，正确的在答题卡相应位置涂“A”，错误的涂“B”。

11. 两复数相等当且仅当对应的实部和虚部分别相等。
 12. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 可微，则 $f(z)$ 在该点必解析。
 13. 设 M 为连续函数 $f(z)$ 在曲线 C 上的最大模， L 为曲线 C 的周长，则

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

14. 一致收敛的函数项级数 $\sum u_n(z)$ 必是收敛的。
 15. 如果 $\oint_C f(z) dz = 0$ ，则函数 $f(z)$ 在曲线 C 围成的区域内解析。
 16. 解析函数将区域映射成区域。

第二部分 非选择题

三、填空题：本大题共 9 小题，每小题 2 分，共 18 分。

17. 复数 $z = 3 + 4i$ ，则 $|z| =$ _____。
 18. 设 $z = 2 - i$ ，则 $\bar{z} =$ _____。
 19. 积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz =$ _____。
 20. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n(n+1)} \right)$ 的和为 _____。
 21. 函数 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 处的泰勒级数为 $e^z =$ _____。
 22. $z = 0$ 为函数 $f(z) = \frac{z}{\sin z - z}$ 的极点，该极点的阶数为 _____。
 23. 已知 $f(z) = \frac{z}{\tan z}$ ，则 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) =$ _____。

24. 已知 $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$ ，则 $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) =$ _____。

25. 函数 $f(z) = z^3$ 在点 $z = i$ 处的旋转角为 _____。

四、计算题：本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分。

26. 讨论函数 $f(z) = x^3 + 6y + 3x^2yi$ 的可微性与解析性，这里 x, y 为实数。

27. 已知函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析，且 $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x$ ， $f(0) = i$ 。求 $f(z)$ 。

28. 求函数 $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{1+z^2}$ 在 $1 < |z| < 2$ 内的洛朗展式。

29. 已知 $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 1}{(z-1)(z+1)^2}$ ，求曲线积分 $\oint_{|z|=2} f(z) dz$ 。

30. 确定函数 $f(z) = \frac{z^2}{\sin z} + e^{\frac{1}{z^2}}$ 的全部奇点及其类型。

31. 求一分式线性变换 $w = L(z)$ ，使得将上半面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映射成上半平面，且

$$L(1+i) = i, L(0) = 0.$$

五、证明题：本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分。

32. 已知 $f(z)$ 在复平面都解析，又 $f(0) = 1 + i$ ，且 $|z| = 1$ 时， $|f(z)| = 2$ 。试证 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内至少有一个零点。

33. 证明方程 $5e^z - 14z^n = 0$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内恰有 n 个根。