

机密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一考试

微分几何

(课程代码 02014)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共8小题, 每小题2分, 共16分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 $\vec{r}(t), \vec{s}(t), \vec{u}(t)$ 分别是可微的向量函数, 则 $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{u})' =$
 - A. $(\vec{r}', \vec{s}', \vec{u}')$
 - B. $(\vec{r}', \vec{s}', \vec{u}')$
 - C. $(\vec{r}, \vec{s}', \vec{u}')$
 - D. $(\vec{r}', \vec{s}, \vec{u}) + (\vec{r}, \vec{s}', \vec{u}) + (\vec{r}, \vec{s}, \vec{u}')$
2. 曲面的曲纹坐标网是渐近网的充要条件是
 - A. $L = N = 0$
 - B. $F = M = 0$
 - C. $E = F = 0$
 - D. $M = N = 0$
3. 单位向量函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 关于 t 的旋转速度等于
 - A. $\vec{r}'(t)$
 - B. $\vec{r}''(t)$
 - C. $|\vec{r}'(t)|$
 - D. $|\vec{r}''(t)|$
4. 在曲线的正常点处, 曲线的切线和主法线所确定的平面是曲线在该点的
 - A. 法平面
 - B. 切平面
 - C. 密切平面
 - D. 从切平面

5. 向量函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 具有固定长的充要条件是

- A. $\vec{r}'(t) \times \vec{r}(t) = \vec{0}$
- B. $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$
- C. $|\vec{r}'(t)| = 1$
- D. $|\vec{r}''(t)| = 1$

6. 曲面上一点 P 处的高斯曲率 $K > 0$, 则点 P 称为曲面的

- A. 双曲点
- B. 椭圆点
- C. 抛物点
- D. 脐点

7. 直纹曲面 $\vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u)$ 的 v -曲线是

- A. 直母线
- B. 与直母线垂直相交的直线
- C. 与导线 $\vec{a}(u)$ 垂直的曲线
- D. 与导线 $\vec{a}(u)$ 平行的曲线

8. 曲面 $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 在 P 点处的两个方向 $(d) = du : dv$ 和 $(\delta) = \delta u : \delta v$ 既正交又共轭, 则

- A. $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = \frac{\pi}{2}, d\vec{r} \cdot \delta\vec{n} = 0$
- B. $d\vec{r} \times \delta\vec{r} = \vec{0}, d\vec{r} \cdot \delta\vec{n} = 0$
- C. $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0, d\vec{n} \cdot \delta\vec{n} = 0$
- D. $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0, d\vec{r} \cdot \delta\vec{n} = 0$

二、判断题: 本大题共10小题, 每小题1分, 共10分。判断下列各题正误, 正确的在答题卡相应位置涂“A”, 错误的涂“B”。

9. 曲线 $\vec{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 上的每一点都是正常点。
10. 曲线在一点处的密切平面就是曲线在该点的切平面。
11. 挠率为定数的曲线是平面曲线。
12. 曲面上一点 P 处使 $k_n = 0$ 的方向称为曲面在点 P 的主法方向。
13. 切线是通过切点的所有直线当中最贴近曲线的直线。
14. 在椭圆柱面上任何点处, 高斯曲率都等于零。
15. 当曲线在一点处的弯曲程度越大, 切向量对于弧长的旋转速度就越小。
16. 一个曲面为可展曲面的充要条件是该曲面为单参数平面族的包络。
17. 一个曲面如果它每一点处的平均曲率 $H = 0$, 称之为极小曲面。
18. 曲面的第一基本形式为 $I = Edu^2 + Gdv^2$, 则 u -曲线和 v -曲线的位置关系为正交。

座位号:

姓名:

第二部分 非选择题

三、填空题：本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。

19. 按照椭圆点、双曲点、抛物点进行分类，可展曲面上的点都是_____。
20. 若空间曲线 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 的切线和固定方向作固定角，则该曲线称为_____。
21. 空间曲线上一点处的曲率圆的半径为 2，则曲线在该点处的曲率为_____。
22. 空间曲线是平面曲线的充要条件是_____。
23. 两个曲面之间的一个变换是保角变换的充要条件是_____。
24. 圆柱螺线 $\vec{r} = \{6 \cos t, 6 \sin t, 8t\}$ 的自然参数表示为_____。
25. 曲面 $\vec{r}(\theta, z) = \{\cos \theta, \sin \theta, z\}$ 在点 $(1, 0, 0)$ 处的切平面方程为_____。
26. 曲面族 $S_\alpha: x \cos \alpha + y \sin \alpha + z \sin \alpha - 6 = 0$ 的包络为_____。

四、计算题：本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分。

27. 求曲线 $\vec{r} = \{3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 4\theta\}$ 在 $\theta = \pi$ 点处的密切平面方程和副法线方程。
28. 求抛物面 $\vec{r}(u, v) = \{u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv\}$ 的第一基本形式和第二基本形式。
29. 求曲面 $\vec{r} = \{u, v, uv^2\}$ 的渐近曲线的微分方程。
30. 求曲线 $\vec{r} = \{3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\}$ 的曲率和挠率。

五、证明题：本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分。

31. 证明 $\vec{r}_{uu} = \vec{r}_{uv} = \vec{0}$ 的曲面 $s: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 是柱面。
32. 证明：如果两条曲线在对应点有公共副法线，则它们是平面曲线。