座位号：________

姓名：________

绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

复变函数与积分变换

（课程代码　02199）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共12小题，每小题3分，共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 下列点集中不是实轴的是

A．$\operatorname{Im} z=0$　　B．$z-\bar{z}=0$　　C．$|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$　　D．$z+\bar{z}=0$

2. $z=t^2+\mathrm{i}t$　（t是实参数）表示的曲线是

A．圆　　B．直线　　C．抛物线　　D．双曲线

3. 下列说法正确的是

A．$\ln z$的定义域为$z>0$　　B．$|\sin z|\leqslant 1$

C．e^z是周期函数　　D．$w=\dfrac{1}{1+z^2}$在全平面解析

4. $\mathrm{e}^z=\mathrm{i}$，则$\operatorname{Im} z=$

A．$\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$　　B．$\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

C．$2k\pi$　　D．$(2k-1)\pi$

5. 下列积分为零的是

A．$\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{z-1}\mathrm{d}z$　　B．$\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$　　C．$\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2}\mathrm{d}z$　　D．$\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z}{z-3}\mathrm{d}z$

6. C为正向圆周$|\zeta|=2$，$f(z)=\oint_C\dfrac{\mathrm{e}^\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，则$f'(-1)=$

A．$\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}}$　　B．$2\pi\mathrm{e}\mathrm{i}$　　C．$2\pi\mathrm{i}$　　D．0

7. C为正向圆周$|z|=2$，则$\oint_C\bar{z}\mathrm{d}z=$

A．0　　B．$2\pi\mathrm{i}$　　C．$4\pi\mathrm{i}$　　D．$8\pi\mathrm{i}$

8. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{2^n n!}$的和函数为

A．e^{-z}　　B．$\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}$　　C．$\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}$　　D．$\cos z$

9. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-3z^2+2z}$在点$z=0$处的洛朗展开式有

A．一个　　B．两个　　C．三个　　D．四个

10. $z=2\pi\mathrm{i}$是函数$\dfrac{z}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}-2}$的极点，其阶数为

A．一阶　　B．二阶　　C．三阶　　D．四阶

11. 分式线性映射$w=\dfrac{2z-1}{2-z}$把圆周$|z|=1$映射成

A．$|w|=1$　　B．$|w|=2$

C．$|w-1|=1$　　D．$|w-1|=2$

12. 下列傅氏变换不正确的是

A．$\mathscr{F}[\delta(\omega)]=1$　　B．$\mathscr{F}[u(t-1)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right)$

C．$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$　　D．$\mathscr{F}[\sin 2t]=\mathrm{i}\pi[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13. 若 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$，则 $n=$__________.

14. 设 $z=\mathrm{e}^{-3-4\mathrm{i}}$，则 $\arg z=$__________.

15. $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$ 的可导点集为__________.

16. 设 L 为复平面上由 $z=0$ 到 $z=1+\mathrm{i}$ 的直线段，则 $\int_L \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z=$__________.

17. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ 在点 $z=\mathrm{i}$ 处的泰勒展开式的收敛半径 $R=$__________.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18. 设 $u(x,y)=2xy-x$，求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

19. 设 C 为从 $z=1$ 到 $z=-1$ 的上半单位圆弧，求 $\int_C \ln z\,\mathrm{d}z$.

20. 设 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{3}{2}$，求 $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z(1-z)^2}$.

21. 将 $f(z)=\sin(z+3)$ 在 $z=0$ 处展成泰勒级数.

22. 将 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

23. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^3}$，求 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的留数.

四、综合题：本大题共 3 小题，共 19 分。

24.（本题 6 分）

（1）求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+5}$ 在上半平面内的孤立奇点；

（2）求 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 在以上孤立奇点处的留数；

（3）利用以上结果求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$.

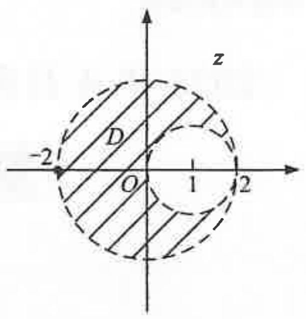
25.（本题 6 分）

设 D 为 z 平面上的新月形区域：$|z|<2$，$|z-1|>1$（如图）.

（1）$w_1=\dfrac{z}{z-2}$ 将 D 映射成 w_1 平面上区域 D_1，求 D_1；

（2）$w=\mathrm{i}w_1$ 将 D_1 映射成 w 平面上区域 G，求 G；

（3）求 $w=f(z)$，将 D 保形映射成 G.



题 25 图

26.（本题 7 分）

利用拉氏变换，求微分方程 $y''+4y=\sin t$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.