座位号：________

姓名：________

机密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一考试

实变函数论

（课程代码　11312）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题1分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设Q是实数集R中有理数的全体，则在R中Q的导集Q'是

　A. Q　　B. 空集
　C. R　　D. $R-Q$

2. 设$\{F_n\}$是一列闭集，$F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则$F$一定是

　A. 开集　　B. 闭集
　C. G_δ型集　　D. F_σ型集

3. 设E是R中有理数全体，则$mE=$

　A. 0　　B. 1
　C. $+\infty$　　D. $-\infty$

4. 设E是$[0,1]$上有理数全体，则下列各式不成立的是

　A. $E'=[0,1]$　　B. $E^o=\varnothing$
　C. $\overline{E}=[0，1]$　　D. $mE=1$

5. 设P是Cantor集，则下列正确的是

　A. P与R^n对等且P的测度为0　　B. P与R^n对等且P的测度为1
　C. P与R^n不对等且P的测度为0　　D. P与R^n不对等且P的测度为1

6. 设$f(x)$与$g(x)$在E上可测，则$E[f\geq g]$是

　A. 不可测集　　B. 可测集
　C. 空集　　D. E

7. 设$f(x)$在可测集E上有定义，$f_n(x)=\min\{f(x),n\}$，则$f_n(x)$是

　A. 可积函数列　　B. 连续函数列
　C. 单调递增函数列　　D. 单调递减函数列

8. 设E是任一可测集，则下列正确的是

　A. E是开集
　B. E是闭集
　C. E是完备集
　D. 对任意$\varepsilon>0$，存在开集$G\supset E$，使$m(G-E)<\varepsilon$

9. 设$\{f_n\}$是E上一列几乎处处有限的可测函数，若对任意$\sigma>0$，则$\{f_n(x)\}$依测度收敛于$f(x)$的定义条件是

　A. $\lim\limits_{n\to\infty}mE[|f_n(x)-f(x)|\geq\sigma]>0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}mE[|f_n(x)-f(x)|\geq\sigma]=0$
　C. $\lim\limits_{n\to\infty}mE[|f_n(x)-f(x)|\geq\sigma]<0$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}mE[|f_n(x)-f(x)|=\sigma]=0$

10. 设$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, x\in[0,1]\cap Q\\ 1+2x, x\in[0,1]-Q\end{cases}$，则$\int_{[0,1]}f(x)dx=$

　A. 1　　B. 2
　C. 3　　D. 4

二、判断题：本大题共5小题，每小题1分，共5分。判断下列各题正误，正确的在答题卡相应位置涂“A”，错误的涂“B”。

11. 在所有基数中，连续基数c是最大基数.

11312

12. $m^*E\geq 0$，当 E 为空集时，$m^*E=0$.

13. 若 $\forall T\subset R^n$, 有 $m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$（Caratheodory 条件），则称 E 为 Lebesgue 可测集.

14. 若 $f_n(x)$ 为 E 上非负可测函数列，则 $\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx\leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$.

15. 有界变差函数必是连续函数.

第二部分　非选择题

三、填空题：本大题共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分。

16. De. Morgan 对偶律是指 $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=$________.

17. 设 $A_{2n}=[0,1], A_{2n+1}=[1,2]$，则上极限集 $\varlimsup_{n\to\infty}A_n=$________.

18. 设 A，B 是两个非空集合，若存在 A 到 B 的双射（既单又满），则称 A 与 B ________.

19. 称 P_0 为 E 的内点，若 $\exists\delta>0$, 使得________.

20. 有限个开集之交仍为________.

21. 外测度的单调性：若 $A\subset B$, 则________.

22. $f(x)$ 是可测集 E 上的实函数，若 $\forall a\in R, E_{[f>a]}$ 可测，则称 $f(x)$ 是 E 上的________.

23. 设 P_0 为 $[0,1]$ 上的康托集，　$f(x)=\begin{cases}1, x\in P_0\\ 2, x\in[0,1]-P_0\end{cases}$ 则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

24.（列维引理）若 $f_n(x)$ 为 E 上非负可测函数列，

$f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_3(x)\leq\cdots\leq f_n(x)\leq\cdots$, 且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则________.

25. 闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 是 *Riemann* 可积的充要条件为 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的几乎处处的________.

四、简答题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

26. 上极限集.

27. 自密集.

28. Lebesgue 外测度.

29. 可测函数.

30. 积分的绝对连续性.

五、证明题：本大题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分。

31. 证明平面上以有理点为圆心，有理数为半径的圆全体 A 为可数集.

32. 设 E 是 $[0,1]$ 中的全体有理数，试证明 E 的外测度为 0.

33. 设对任何 $\varepsilon>0$, $\exists$ 开集 $G\supset E$, 使 $m^*(G-E)<\varepsilon$，证明 E 是可测集.

34. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(R)\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx=2$.

35. 证明 $[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $f(x)$ 都可以表示为两个增函数之差.

六、综合题：本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分。

36. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^3 nxdx$.