

浙江省 2015 年 10 月高等教育自学考试 实变函数与泛函分析初步试题

课程代码:10023

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

- 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
- 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

- 设 $X = \{x \mid x \text{ 是一个数列 } \{x_n\} \text{ 且 } x_n \text{ 是有理数}, n = 1, 2, \dots\}$, 则
 - X 的基数是 c
 - X 的基数小于 c 且大于 a
 - X 的基数大于 c
 - X 的基数是 a
- 已知开区间列 $A_{2n} = (-2, \frac{1}{n})$, 闭区间列 $A_{2n-1} = (-1, n)$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n =$
 - $(-2, +\infty)$
 - $(-1, +\infty)$
 - $(-1, 0)$
 - $(-1, 0]$
- 若 P 是康托尔集, $A = (0, 6) - P$, $B = (-1, 5] \cap P$, 则 $A \cup B$ 的导集是
 - $[0, 5]$
 - $[0, 6]$
 - $[-1, 5]$
 - $[-1, 6]$
- 若 A 是有理数集, $E = (-1, 5] \cap A$, 则 $[0, 6) \cup E$ 的边界是
 - $\{-1, 0, 6\}$
 - $[-1, 0]$
 - $(-1, 0] \cup \{6\}$
 - $[-1, 0] \cup \{6\}$
- 在 4 维欧氏空间中, 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个两两不相交的可测集, $B_k \subset A_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\sum_{i=1}^n m^* B_i - m^* (\bigcup_{i=1}^n B_i)$ 是
 - 负实数
 - 0
 - 正实数
 - 非零实数
- f 是 E 上的可测函数当且仅当对任何无理数 $t, E[f > t]$ 是
 - 有限集
 - 可数集
 - 可测集
 - 不可数集
- 设函数 f 在可测集 E 上连续且 $E \subset R^k$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E[f < -n]$ 是一个
 - 可测集
 - G_δ 型集
 - F_σ 型集
 - 不可测集

8. 设 Q 是有理数集, $\varphi(x) = \begin{cases} 2\arcsin x & x \in [0, 1] \cap Q \\ \ln(1+x) & x \in [0, 1] - Q \\ 1 & x \in (1, 3] \end{cases}$, 则 $\int_{[0,3]} \varphi(x) dx$ 的值是

- A. 2 B. π C. $1 + 2\ln 2$ D. $\pi - 1 + 2\ln 2$

二、判断题(本大题共 7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

判断下列各题, 在答题纸相应位置正确的涂“**A**”, 错误的涂“**B**”。

9. 若 A 是无限个开区间的并集, 则 $(-\infty, +\infty) - A$ 是闭集。
10. n 维欧氏空间中的每个闭集都可以表示成可数个开集的并集。
11. 在 n 维欧氏空间中, 零测度集的闭包也是零测度集。
12. 设 A 是勒贝格可测集, 则存在 F_σ 型集 F 使得 $A \supset F$ 且 $m(A - F) = 0$ 。
13. 三维欧氏空间中的平面的测度一定为零。
14. 设 f 和 f_n 都是可测函数, $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f , 则对于正数 δ , 总存在 E_δ 使得 $m(E - E_\delta) < \delta, E \supset E_\delta$, 且 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f 。
15. 定义在 $[0, 1]$ 上的单调函数一定几乎处处可导。

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

三、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

16. 已知 $B = [-2, 1]$ 和 $A_n = (-1, \frac{1}{n}]$ 分别是闭区间和左开右闭的区间, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} (B - A_n) =$ _____。
17. 在 2 维欧氏空间 R^2 中, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, x < 0\}$ 的导集是_____。
18. 在 E 上, 若 $f_n(x)$ 依测度收敛于 0, 且对每个自然数 $n, f_n(x)$ 与 $g_n(x)$ 几乎处处相等, 则 $g_n(x)$ 依测度收敛于_____。
19. 设 $\int_E |f(x) - 1| dx = 0$, 则 f 在 E 上几乎处处等于_____。
20. 设 $f(x) = |4x^2 - 1|$, 则 $\overset{2}{V}_0(f) =$ _____。

四、完成下列各题(本大题共 3 小题, 每小题 9 分, 共 27 分)

21. 设 E 是一维欧氏空间 R^1 中的可数集, 利用外测度的定义证明 $m^* E = 0$ 。
22. 证明若 $f^3(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 则 $f(x)$ 也是可测函数。
23. 举一个例子说明勒贝格可积函数可以是黎曼可积函数, 再举一个例子说明勒贝格可积函数可以不是黎曼可积函数。