

## 微分几何试题

课程代码:10022

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

## 选择题部分

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

## 一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 空间曲线的伏雷内公式是

$$A. \begin{cases} \dot{\alpha} = k\beta \\ \dot{\beta} = -k\alpha + \tau\gamma \\ \dot{\gamma} = -\tau\beta \end{cases} \quad B. \begin{cases} \dot{\alpha} = -k\beta \\ \dot{\beta} = -k\alpha + \tau\gamma \\ \dot{\gamma} = -\tau\beta \end{cases} \quad C. \begin{cases} \dot{\alpha} = k\beta \\ \dot{\beta} = k\alpha + \tau\gamma \\ \dot{\gamma} = -\tau\beta \end{cases} \quad D. \begin{cases} \dot{\alpha} = k\beta \\ \dot{\beta} = k\alpha - \tau\gamma \\ \dot{\gamma} = -\tau\beta \end{cases}$$

2. 曲线(C)是一般螺线,则以下命题不正确的是

- A. (C) 的切线与一固定方向成固定角  
B. (C) 的副法线与一固定方向成固定角  
C. (C) 的主法线与一固定方向垂直  
D. (C) 的副法线与一固定方向垂直

3. 曲面的三个基本形式之间的关系为

- A.  $\text{III} + 2H\text{II} + K\text{I} = 0$   
B.  $\text{III} - 2H\text{II} + K\text{I} = 0$   
C.  $\text{III} - 2K\text{II} + H\text{I} = 0$   
D.  $\text{III} - 2H\text{II} - K\text{I} = 0$

4. 下列曲面中,不与平面等距的曲面是

- A. 锥面  
B. 正螺面  
C. 柱面  
D. 可展曲面

5. 曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在  $P$  点的第一、第二基本形式分别为  $\text{I}, \text{II}$ , 曲面上曲线(C)在  $P$  点的曲率  $k$ 、沿切向  $d\vec{r}$  的法曲率为  $k_n$ , (C) 在  $P$  点的主法向量与曲面的单位法向量  $\vec{n}$  的夹角为  $\theta$ , 则下式正确的是

- A.  $k_n = \pm \frac{\text{II}}{\text{I}}$   
B.  $k_n = k \cos \theta$   
C.  $|k_n| = \frac{\text{II}}{\text{I}}$   
D.  $k_n = k \sin \theta$

## 非选择题部分

### 注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

### 二、填空题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

6. 平面  $\vec{r} = (u, v, 0)$  的第一基本形式是  $I = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 向量函数  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  具有固定长,则  $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设曲线在  $P$  点的单位切向量为  $\vec{\alpha}$ , 主法向量  $\vec{\beta}$ , 则过  $P$  由  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  确定的平面是曲线在  $P$  点的  $\underline{\hspace{2cm}}$  平面.

9. 已知一族曲线,则与其正交的另一族曲线叫做这族曲线的  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $s = 1$  处有  $\dot{\vec{r}} = 3\vec{\beta}$ , 则曲线在  $s = 1$  处的挠率  $\tau = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 如果曲线的曲率与挠率之比  $\frac{\kappa}{\tau}$  是一常数,则这曲线是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在  $(0, 1)$  处有  $\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = 1, \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v = 3$ , 则在  $(0, 1)$  处的第二基本量  $M$  等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 曲面上在点  $P$  处使  $k_n = \underline{\hspace{2cm}}$  的方向称为曲面在  $P$  点的渐近方向.

14. 如果曲面  $S$  在  $P$  点的两个方向  $d\vec{r}$  与  $\delta\vec{r}$  既正交又  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 则称这两个方向为曲面  $S$  在  $P$  点的两个主方向.

15. 设  $k_1, k_2$  为曲面在一点的两个主曲率, 则其平均数  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  叫曲面在这点的  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、计算题(本大题共 6 小题,每小题 7 分,共 42 分)

16. 求曲线  $\vec{r} = \{2\cos\theta, 2\sin\theta, 3\theta\}$  在点  $(2, 0, 0)$  的切线和法平面.

17. 求曲线  $\vec{r} = \{(3t - t^3), 3t^2, (3t + t^3)\}$  的挠率.

18. 求球面  $\vec{r} = \{a\cos\vartheta\cos\varphi, a\cos\vartheta\sin\varphi, a\sin\vartheta\}$  的第一基本形式.

19. 求曲面  $\Sigma: I = \rho^2(u, v)du^2 + \rho^2(u, v)dv^2$  的高斯曲率  $K$ .

20. 求曲面  $\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, bv\}$  的主曲率.

21. 求正交网的坐标曲线的测地曲率.

### 四、证明题(本大题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分)

22. 证明:若表面上的曲线  $\Gamma$  既是渐近线又是测地线,则它必是直线.

23. 设空间两条曲线  $\Gamma$  和  $\Gamma^*$  的曲率处处不为零,若曲线  $\Gamma$  和  $\Gamma^*$  可以建立一一对应,且在对应点的主法线互相平行,求证曲线  $\Gamma$  和  $\Gamma^*$  在对应点的切线成固定角.

24. 证明正螺面  $\vec{r} = \{v\cos u, v\sin u, au + b\}$  ( $a \neq 0$ ) 不是可展曲面.