全国 2006 年 4 月高等教育自学考试
复变函数与积分变换试题
课程代码：02199

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1.设 $z=1+2i$，则 $\mathrm{Im}\, z^3=$（ ）

A.-2　　B.1

C.8　　D.14

2.$z=(1+\cos t)+i(2+\sin t), 0\leq t<2\pi$ 所表示的曲线为（ ）

A.直线　　B.双曲线

C.抛物线　　D.圆

3.$\ln(-1)$为（ ）

A.无定义的　　B.0

C. πi　　D.$(2k+1)\pi i$(k 为整数)

4.设 $z=x+iy$,则（$1+i$）z^2 的实部为（ ）

A.x^2-y^2+2xy　　B.x^2-y^2-2xy

C.x^2+y^2+2xy　　D.x^2+y^2-2xy

5.设 $z=x+iy$，解析函数 $f(z)$的虚部为 $v=y^3-3x^2y$，则 $f(z)$的实部 u 可取为（ ）

A.x^2-3xy^2 B.$3xy^2-x^3$

C.$3x^2y-y^3$ D.$3y^3-3x^3$

6.设 C 为正向圆周|z|=1，则 $\oint_C \frac{dz}{z^2}=$（ ）

A.0 B.1

C.πi D.$2\pi i$

7.设 C 为从-i 到 i 的直线段，则 $\int_C |z|\,dz=$（ ）

A.i B.2i

C.-i D.-2i

8.设 C 为正向圆周|z|=1，则 $\oint_C \frac{\sin z}{e^z-1}dz=$（ ）

A.$2\pi i\cdot\sin 1$ B.$-2\pi i$

C.0 D.$2\pi i$

9.复数列 $z_n=e^{\frac{n\pi}{2}i}$ 的极限为（ ）

A.-1 B.0

C.1 D.不存在

10.以 z=0 为本性奇点的函数是（ ）

A.$\frac{\sin z}{z}$ B.$\frac{1}{z(z-1)}$

C.$\frac{1-\cos z}{z^2}$ D.$\sin\frac{1}{z}$

11.$f(z)=\frac{1}{e^z-1}$ 在 $z=\pi i$ 处的泰勒级数的收敛半径为（ ）

A.πi B.$2\pi i$

C.π D.2π

12.设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，则 $f^{(10)}(0)$为（ ）

A.0 B.$\frac{1}{10!}$

C.1 D.$10!$

13.设函数 $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$，则 Res[f(z),-i]=（ ）

A.0 B.$-\frac{ie}{4}$

C. $\frac{ie}{4}$　　D. $\frac{e}{4}$

14.把点 z=1，i,-1 分别映射为点 w=∞,-1,0 的分式线性映射为（　　）

A. $w=\frac{z-1}{z+1}$　　B. $w=\frac{i(z+1)}{1-z}$

C. $w=\frac{z+1}{1-z}$　　D. $w=\frac{i(z-1)}{z+1}$

15.w=e^z 把带形区域 0<Im z<2π 映射成 W 平面上的（　　）

A.上半复平面　　B.整个复平面

C.割去负实轴及原点的复平面　　D.割去正实轴及原点的复平面

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

16.arg(3-i)=___________.

17.对数函数 w=ln z 的解析区域为___________.

18.设 C 为正向圆周|z|=1，则积分 $\oint_C \frac{1}{z}dz=$___________.

19.设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+i$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^n$ 的收敛半径为___________.

20.设 C 为正向圆周 $|\xi|=1$，则当 $|z|<1$时，$f(z)=\oint_C \frac{\sin 2\xi}{(\xi-z)^3}d\xi=$___________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

21.求方程 $z^3+8=0$ 的所有复根.

22.设 $u=x^2-y^2+xy$ 是解析函数 f(z)的实部，其中 z=x+iy.求 f′(z)并将它表示成 z 的函数形式.

23.设 $v=e^{ax}\sin y$，求常数 a 使 v 成为调和函数.

24.设 C 为正向圆周|z|=1，计算积分 $I=\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{1}{2})(z+2)^2}dz$.

25.计算积分 $I=\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$，其中 C 为正向圆周|z|=1，|a|≠1.

26.(1)求 $\frac{1}{z}$ 在圆环域 1<|z-1|<+∞内的罗朗级数展开式；

(2)求 $\frac{1}{z^2}$ 在圆环域 1<|z-1|<+∞内的罗朗级数展开式.

27.求 f(z)=ln z 在点 z=2 的泰勒级数展开式，并求其收敛半径.

28.计算积分 $I=\oint_C \frac{1}{z^2-(1+i)z}dz$，其中 C 为正向圆周|z|=2.

四、综合题（下列3个小题中，29题必做，30、31题中选做一题。每小题10分，共20分）

29.（1）求 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 在上半平面的所有孤立奇点；

（2）求 f(z)在以上各孤立奇点的留数；

（3）利用以上结果计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

30.设 D 是上半单位圆：Im z>0,|z|<1，求下列保角映射：

（1）$w_1=f(z)$把 D 映射为第 II 象限 D_1，且 f(1)=0；

（2）$w_2=g(w_1)$把 D_1 映射为第 I 象限 D_2；

（3）$w=h(w_2)$把 D_2 映射为上半平面 D_3；

（4）求把 D 映射为 D_3 的保角映射 w=F(z).

31.求函数 $2\delta(t)-3f(t)$ 的傅氏变换，其中 $f(t)=\begin{cases}te^{-t}, t>0\\ 0, t\le 0.\end{cases}$