全国 2007 年 4 月高等教育自学考试

线性代数（经管类）试题

课程代码：04184

说明：在本卷中，A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式.

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1．设 A 为 3 阶方阵，且$|A|=2$，则$|2A^{-1}|=$（　　）

A．-4　　　　B．-1

C．1　　　　D．4

2．设矩阵 $A=(1,2)$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，则下列矩阵运算中有意义的是（　　）

A．ACB　　　　B．ABC

C．BAC　　　　D．CBA

3．设 A 为任意 n 阶矩阵，下列矩阵中为反对称矩阵的是（　　）

A．$A+A^{T}$　　　　B．$A-A^{T}$

C．AA^{T}　　　　D．$A^{T}A$

4．设2阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $A^{*}=$（　　）

A．$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　　　　B．$\begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$　　　　D．$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

5．矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是（　　）

A．$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$　　　　B．$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$　　　　D．$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，则 A 中（　　）

A．所有2阶子式都不为零　　　　B．所有2阶子式都为零

C．所有3阶子式都不为零　　　　D．存在一个3阶子式不为零

7．设 A 为 m×n 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是（　　）

A．A 的列向量组线性相关　　　　B．A 的列向量组线性无关

C．A 的行向量组线性相关　　　　D．A 的行向量组线性无关

8．设3元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解为 $\alpha=(1,0,2)^{T}$，$\beta=(1,-1,3)^{T}$，且系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$，则对于任意常数 k, k_1, k_2，方程组的通解可表为（　　）

A．$k_1(1,0,2)^{T}+k_2(1,-1,3)^{T}$　　　　B．$(1,0,2)^{T}+k(1,-1,3)^{T}$

C．$(1,0,2)^{T}+k(0,1,-1)^{T}$　　　　D．$(1,0,2)^{T}+k(2,-1,5)^{T}$

9．矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值为（　　）

A．4　　B．3

C．2　　D．1

10．4元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4$ 的秩为（　　）

A．4　　B．3

C．2　　D．1

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

11．若 $a_ib_i\neq 0, i=1,2,3,$ 则行列式 $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix}=$____________.

12．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=$____________.

13．若齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则其系数行列式的值为____________.

14．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B})=$____________.

15．向量空间 $V=\{x=(x_1,x_2,0)|x_1,x_2$ 为实数$\}$的维数为____________.

16．设向量 α=（1，2，3），β=（3，2，1），则向量 α，β 的内积（α，β）=____________.

17．设 $\boldsymbol{A}$ 是4×3矩阵，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=$____________.

18．已知某个3元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 经初等行变换化为：$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{pmatrix}$，若方程组无解，则 a 的取值为____________.

19．设3元实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为3，正惯性指数为2，则此二次型的规范形是____________.

20．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围是____________.

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

21．计算3阶行列式 $\begin{vmatrix} 123 & 23 & 3 \\ 249 & 49 & 9 \\ 367 & 67 & 7 \end{vmatrix}$.

22．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$

23．设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,-2,4,-2)^T$，$\alpha_3=(3,0,6,-1)^T$，$\alpha_4=(0,3,0,-4)^T$.

（1）求向量组的一个极大线性无关组；

（2）将其余向量表为该极大线性无关组的线性组合.

24．求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系及通解.

25．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

26．利用施密特正交化方法，将下列向量组化为正交的单位向量组：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

四、证明题（本大题6分）

27．证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为3阶可逆的上三角矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角矩阵.